

Geophysiologische Modellierung der Wechselwirkung von Klima und Biosphäre

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Naturwissenschaften

(Dr. rer. nat.)

in der Wissenschaftsdisziplin Theoretische Physik

eingereicht an der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität Potsdam

von

Werner von Bloh

geboren am 26. November 1963 in Oldenburg (Oldb.)

Potsdam, im August 1999

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	11
1.1	Die Gaia-Hypothese	11
1.2	Beispiele geophysiologischer Regelungsprozesse im Erdsystem . .	12
1.3	Gliederung der Arbeit	14
2	Lovelock-Watson-Modell (“Daisy-World”)	17
2.1	Modellbeschreibung	17
2.2	Fixpunktanalyse	21
2.2.1	Bestimmung der Fixpunkte	21
2.2.2	Stabilitätsanalyse der Fixpunkte	23
2.3	Verhalten des Modells bei eingeschränkter Wachstumsfläche . . .	25
3	Eindimensionale Erweiterung des Lovelock-Watson-Modells	29
3.1	Modellbeschreibung	29
3.2	Verhalten des Modells bei inhomogener Einstrahlung	31
4	Allgemeine Formulierung der Klima-Biosphärenkopplung	35
4.1	Modellbeschreibung	35
4.2	Analyse der homogenen Biosphäre	37
4.3	Existenz von dissipativen Strukturen, diffusive Instabilität	42
4.4	Ausbreitung von Störungen	42
5	Erweiterung des Klima-Biosphärenmodells um den Kohlenstoffzyklus	49
5.1	Modellbeschreibung	49
5.2	Gleichgewichtslösungen	52
5.3	Parametrisierung	55
5.4	Numerische Analyse	60
6	Zweidimensionales Automatenmodell	63
6.1	Entwicklung des Modells	63
6.1.1	Temperaturverteilung	63

6.1.2	Vegetationsdynamik	64
6.1.3	Rand- und Startbedingungen	66
6.2	Vergleich mit dem ursprünglichen Lovelock-Watson-Modell	67
6.3	Numerische Lösung des Automatenmodells	69
6.3.1	Implementation auf Parallelrechner	69
6.3.2	Parallelisierung des zellulären Automaten	69
6.3.3	Effizienzanalyse der Parallelisierung	70
6.4	Analyse für konstante solare Einstrahlung	73
6.5	Analyse für linearen Anstieg der solaren Einstrahlung	75
6.5.1	Artenspektrum bei Erhöhung von S	79
6.6	Hystereseeigenschaften	80
6.7	Fragmentierung der Wachstumsfläche	82
6.7.1	Fragmentierung mit Hilfe des Perkulationsmodells	83
6.7.2	Modifikationen des Automatenmodells	86
6.7.3	Erklärung des Verhaltens	87
6.7.4	Einfluß der Systemgröße	91
6.7.5	Einfluß der Fragmentierung auf das Artenspektrum	91
6.7.6	Vergleich mit trivialer Reduzierung des Wachstumsraums	92

7	Zusammenfassung	95
----------	------------------------	-----------

Abbildungsverzeichnis

1.1	Entwicklung der globalen Temperatur bei ansteigender solaren Einstrahlung. Die gestrichelte Linie gibt die Entwicklung bei konstanter, auf den heutigen Wert fixierten CO_2 -Konzentration in der Atmosphäre an.	14
2.1	Strahlungsbilanz des Planeten. Die Temperatur ergibt sich aus dem Gleichgewicht zwischen Ab- und Einstrahlung.	17
2.2	Graphische Darstellung der gewählten Wachstumsfunktion $\beta(T)$ als Funktion der Temperatur.	19
2.3	Zeitliche Entwicklung des Lovelock-Watson-Modells bei Erhöhung der solaren Einstrahlung S . Oberes Bild: Globaltemperatur T als Funktion der solaren Einstrahlung S , wobei die gestrichelte Linie die Temperaturentwicklung des unbelebten Planeten angibt. Unteres Bild: Korrespondierende Entwicklung der von Art 1 und Art 2 bedeckten Flächen N_1 bzw. N_2	21
2.4	Mittlere Temperatur T als Funktion der solaren Einstrahlung S für die verschiedenen Fixpunkte des Systems. Gestrichelt gezeichnet sind die instabilen Lösungen, für die mindestens ein Eigenwert positiv ist.	24
2.5	Phasenraumportraits im $\{N_1, N_2\}$ Raum für unterschiedliche solare Einstrahlungen S ((a) $S = 0.5$, (b) $S = 0.62$, (c) $S = 1.5$, (d) $S = 1.8$). Die Linien sind Trajektorien des dynamischen Systems, die Kreise bezeichnen dessen Fixpunkte.	25
2.6	Existenzintervall $w = \frac{S_{\max}}{S_{\min}}$ für Leben in Abhängigkeit von den gewählten Werten für die Vegetationsalbedo α_1 und α_2 der beiden Arten.	26
2.7	Mittlere Temperatur bei linearer Zunahme der nicht mehr bewachsenen Fläche p für verschiedene solare Einstrahlungen S . $T_0 = T_0(S)$ bezeichnet dabei die Temperatur des vegetationslosen Planeten.	27

3.1	Gleichgewichtslösung des räumlich eindimensionalen Modells bei kosinusförmiger Einstrahlung und verschwindender Diffusion der Arten ($D_N \equiv 0$). Oberes Bild: Mittlere lokale Temperatur $T(x)$ gegenüber dem Ort x . Gestrichelt gezeichnet ist die Temperaturverteilung ohne Vegetation aufgrund der lokal unterschiedlichen Einstrahlung. Unteres Bild: Kumulatives Artenspektrum $\tilde{N}_i(x) = \sum_{j=1}^i N_j(x)$	33
3.2	Stationäre Lösung des räumlich eindimensionalen Modell bei kosinusförmiger Einstrahlung bei $D_T, D_N > 0$. Oberes Bild: Mittlere lokale Temperatur $T(x)$ gegenüber dem Ort x . Gestrichelt gezeichnet ist die Temperaturverteilung ohne Vegetation aufgrund der lokal unterschiedlichen Einstrahlung. Unteres Bild: Kumulatives Artenspektrum $\tilde{N}_i(x) = \sum_{j=1}^i N_j(x)$	34
4.1	Qualitative Verhalten des Einstrahlterms $\Psi(N)$ als Funktion der Vegetation N	36
4.2	Phasenraumportraits des dynamischen Systems (4.5) für verschiedene solare Einstrahlungen $\hat{S}$. Die Fixpunkte ergeben sich aus den Schnittpunkten der Kurven I: $N = g(T)/\gamma$ und II: $T = (\Psi(N)/\sigma)^{\frac{1}{4}}$ und sind mit a-c bezeichnet.	38
4.3	Phasenraumportrait von (4.4) entsprechend Abb. 2.5 mit (a) $T_a^* < T_{\min}$ ("Kältewüste"), (b) $T_c^* < T_{\text{opt}}$, (c) $T_c^* < T_{\text{opt}}$, (d,e) $T_a^* > T_{\min}$, (f) $T^* > T_{\max}$	41
4.4	Zeitliche Entwicklung der Vegetation $N(x, t)$ für eine rechteckförmige Störung mit (a) $w < w_{\text{crit}}$, (b) $w > w_{\text{crit}}$. Die Markierung an den Kurven in (a) geben die Zeit t an. Die äquidistanten Kurven in (b) deuten auf eine konstante Ausbreitungsgeschwindigkeit der nichtlinearen Welle hin.	46
4.5	Zeitliche Entwicklung der Anfangsstörungen nach Gl. 4.15 für (a) große δ und (b) kleine δ	47
4.6	Kumulativer Vegetationsanteil für das eindimensionale Daisy-World-Modell für verschiedene Zeiten $t = n\Delta t$. Der konstante Abstand der Kurven läßt auf eine konstante Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen schließen.	48
5.1	Die Wachstumsfunktion $G_N(N) = g_C(A - N) \cdot g_N(N)$ als Funktion von N	51
5.2	Funktion $\phi(C) = \phi(A - N)$ des CO_2 -Treibhauseffekts in Abhängigkeit von N . Der Wert $\phi(A) = \phi_A$ entspricht dem vegetationslosen Planeten mit $N = 0$, wird allein durch den Wert von A bestimmt.	51

5.3	Qualitativer Verlauf der Funktion $\Psi(N) = S(1 - \alpha(N))$ in Abhängigkeit der Vegetation N : Untere bzw. obere Schranke sind durch $s_1 = S(1 - \alpha_1)$, $s_2 = S(1 - \alpha_2)$ gegeben.	52
5.4	Qualitativer Verlauf der Funktion $\Phi(N)$; An der Stelle N_{cr} ist $\Phi' = 0$ bzw. $(\ln \Psi)'_N = (\ln \phi)'_N$	53
5.5	Mögliche Gleichgewichtslösungen für den Kohlenstoff in der Vegetation N als Funktion der Temperatur T und des Gesamtkohlenstoffs A . Für $A > A_{crit}$ existiert nur die Lösung des vegetationslosen Planeten.	58
5.6	Stabilität des vegetationslosen Planeten: Im Intervall $[T'_{min}, T'_{max}]$ mit $g_T < \beta_1 A$ ist er instabil ($[T''_{min}, T''_{max}]$ für $\beta_2 A$). Bei $\beta A \equiv 1$ reduziert sich das Intervall zu einem Punkt, für Werte größer 1 ist er stabil für alle T	59
5.7	Stabilitätsgrenze: $g_T(T_0^*) = \beta A$, $T_0^* = T_0^*(A)$. Der schraffierte Bereich markiert den Parameterbereich mit einem instabilen vegetationslosen Planeten, in dem sich aus dem toten Planeten heraus Vegetation entwickeln kann.	61
5.8	Phasenraumportraits im Vegetations-Temperaturraum $\{N, T\}$ für ansteigenden Gesamtkohlenstoff A . (a): "Kältewüste" und "kalter grüner Planet" sind stabile Fixpunkte, (b) "Kältewüste", "kalter" und "heißer grüner" Planet sind stabil, (c) "Kältewüste" und "heißer grüner" Planet sind stabil. Die unterschiedlich schraffierten Flächen geben die Attraktionsgebiete der jeweiligen Fixpunkte an.	62
6.1	Wachstumsregeln für eine Gitterzelle. Deren Zustand zur Zeit t_{n+1} hängt nur von ihrem Zustand zur Zeit t_n und der ihrer Nachbarn ab.	65
6.2	Shared Memory (linke Seite) versus distributed Memory Architektur (rechte Seite).	70
6.3	Gittertopologie mit $M = 16$ Prozessoren: Jeder Prozessor hat genau 4 Nachbarn.	71
6.4	Gemessene Rechenzeit T in Abhängigkeit von der Prozessorzahl p für Torustopologie (linke Seite). Auf der rechten Seite ist die zugehörige Effizienz E dargestellt. Die durchgezogene Linie gibt Gl. 6.15 mit durch lineare Regression bestimmten c_1, c_2 wieder.	73
6.5	Artenspektren $B(\alpha)$ für Mutationsraten $r = 0, 0.005, 0.01, 0.1$ nach 10^6 Iterationen bei konstanter solarer Einstrahlung, $T_0(S) = T_{opt}$	75
6.6	Standardabweichung σ für verschiedene Mutationsraten r . Die horizontale gestrichelte Linie gibt den Wert bei gleichverteiltem Spektrum ($B(\alpha) = \text{const}$) an.	76

6.7	Oberes Bild: Mittlere Temperatur des Modells bei einer Anfangstemperatur von $T_0 = 22.5^\circ\text{C}$ bei linearer Erhöhung von S . Unteres Bild: Flächenanteil der beiden Arten, $\alpha_1 = 0.25$, $\alpha_2 = 0.75$	77
6.8	Oberes Bild: Mittlere Temperatur des Modells bei einer Anfangstemperatur von $T_0 = 22.5^\circ\text{C}$ bei linearer Erhöhung von S ohne Albedomutation. Als Startbedingung wurde ein gleichverteiltes Artenspektrum mit $\alpha \in [0, 1]$ vorgegeben. Anzahl der Iterationen: 10^6 . Unteres Bild: Kumulatives Artenspektrum.	78
6.9	Oberes Bild: Mittlere Temperatur des Modells mit Mutation ($r = 0.05$) bei einer Anfangstemperatur von $T_0 = 22.5^\circ\text{C}$ bei linearer Erhöhung von S . Sämtliche Modellparameter blieben sonst unverändert. Unteres Bild: Kumulatives Artenspektrum.	79
6.10	Kritische Einstrahlung S_{crit} gegenüber der Mutationsrate r . Die solare Einstrahlung wurde so gewählt, daß $T_0(S) = T_{\text{opt}} = 22.5^\circ\text{C}$. Die angegebenen Werte sind Durchschnittswerte aus 10 Simulationsläufen.	80
6.11	Kritische solare Einstrahlung S_{crit} als Funktion des Albedointervalls $[a, 1 - a]$ der Vegetation. Die angegebenen Werte sind Durchschnittswerte aus 10 Simulationsläufen. Die horizontale Linie gibt den Wert der solaren Einstrahlung bei $T_0(S) = 40^\circ\text{C}$ an. Für $a > 0.4$ ist keine Selbstregulation mehr festzustellen.	81
6.12	Globale Mitteltemperatur $\bar{T}$ als Funktion der solaren Einstrahlung S für beide Automatenregeln A und B. Mutationsrate $r = 0.05$. . .	81
6.13	Artenspektrum $B(\alpha)$ für solare Einstrahlungen bei $S = 1.05$ und $S = 1.7$, Mutationsrate $r = 0.01$	82
6.14	σ als Funktion der solaren Einstrahlung bei einer Mutationsrate $r = 0.01$	83
6.15	Räumliche Albedoverteilung für verschiedene solare Einstrahlungen S . Die Bilder auf der linken Hälfte sind bei Erhöhen, auf der rechten Seite bei Absenken von S aufgenommen worden.	84
6.16	Verhalten bei anschließendem Absenken der solaren Einstrahlung (spontane Erzeugungsrate $\pi = 10^{-4}$).	85
6.17	Cluster für verschiedene p , ($p = 0.3$, $p = 0.5$, $p = p_c = 0.593$, $p = 0.7$). Ein zusammenhängender Cluster ist jeweils dunkel markiert.	86
6.18	Oberes Bild: Mittlere Temperatur in Abhängigkeit von der unbewachsenen Fläche p . Anzahl der Iterationen: $N = 10^6$, Temperatur des unbewachsenen Planeten $T_0 = 35^\circ\text{C}$. Unteres Bild: Korrespondierendes Artenspektrum.	88
6.19	Die Mitteltemperatur $\bar{T}$ als Funktion der solaren Einstrahlung (parametrisiert durch $T_0(S)$) und Fragmentierungsrate p	89

6.20	Mittlere Temperatur in Abhängigkeit von dem Fragmentierungsgrad p für verschiedene konstante solare Einstrahlungen S . Die Wärmeleitung D_T ist für die Gesteinsfläche gleich Null. T ist die über alle bewachsbaren Zellen gemittelte Temperatur. An der rechten Seite ist für jede Kurve die zu S korrespondierende Gleichgewichtstemperatur T_0 des unbelebten Planeten bezeichnet. Gittergröße: 400×400	90
6.21	Entwicklung der globalen Temperatur gegenüber Parameter p für verschiedene Systemgrößen: (a) $L = 200$, (b) $L = 400$, (c) $L = 800$. .	91
6.22	Biodiversität quantifiziert durch die Standardabweichung σ des Artenspektrums als Funktion der zunehmenden Fragmentierung p . $S = 1$, d.h. $T_0(S) = T_{\text{opt}}$	92
6.23	Entwicklung der globalen Mitteltemperatur $\bar{T}$ bei zunehmenden Anteil π der nicht bewachsbaren Fläche bei trivialer Reduzierung des Wachstumsraums. Die gestrichelte Linie gibt den Verlauf nach Gl. 6.17 wieder.	93

Tabellenverzeichnis

2.1	Parameterwahl des Lovelock-Watson-Modells für die Simulationsläufe entsprechend Watson und Lovelock (1983).	20
6.1	Rechenzeit in Abhängigkeit von der Prozessorzahl für Gittergröße $L = 200$ bei sonst gleicher Parameterwahl.	73
6.2	In den Modellsimulationen gewählte Parameter für das Automatenmodell.	74

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Die Gaia-Hypothese

Erste Arbeiten zur Modellierung der Wechselwirkung zwischen Vegetation und Klima wurden von Kostitzin durchgeführt (Kostitzin, 1935). Er realisierte dabei Vernadsky's Vorstellung (Vernadsky, 1926) von dieser Wechselwirkung in einem mathematischen Modell der Koevolution von Atmosphäre und Vegetation. Im Rahmen der Suche nach möglichem Leben auf anderen Planeten des Sonnensystems entwickelte Lovelock die Vorstellung einer selbstregulatorischen Erde (Lovelock, 1965). Betrachtet man die Zusammensetzung der Atmosphäre von Venus, Erde und Mars, so stellt man fest, daß die beiden unbelebten Planeten Venus und Mars sich diesbezüglich in einem chemischen Gleichgewicht befinden, während der Zustand der Erde deutlich davon abweicht. Lovelock und Margulis (1974) formulierten die "Gaia-Hypothese" als die Selbstregulation des Systems Erde durch und für die Biosphäre. Sie prägten dafür den aus der Biologie der Zelle entlehnten Begriff der "Homöostase". Diese Vorstellung war zuerst auf die atmosphärischen Regelungsprozesse beschränkt, wurde aber im folgenden auf weitere Bereiche des Erdsystems (Ozean, Kontinente) ausgeweitet. Dies mündete schließlich in einer Vorstellung der Erde als "Superorganismus", der gegen externe und interne Störungen seine Funktionen aufrecht erhält (Lovelock, 1989; Lovelock, 1991; Volk, 1998). Analog der Physiologie von Lebewesen spricht man beim Erdsystem von "Geophysiologie" (Krumbein, 1983). Ein Überblick über den gegenwärtigen Stand der Gaia-Forschung ist in (Lenton, 1998) gegeben.

Im Rahmen der Modellvorstellung von einer wechselwirkenden Biogeosphäre wurde zur Untermauerung dieser Thesen das Daisy-World-Modell entwickelt, um auf einer konzeptuellen Ebene die Selbstregulationseigenschaften an einem gekoppelten Klima-Vegetationsmodell aufzuzeigen. Gegenüber den "klassischen" Ansätzen zur Vegetationsmodellierung (Esser, 1991; Lüdeke et al., 1995) mit ei-

ner Vielzahl von Gleichungen und Parametrisierungen bieten solche strukturell sehr einfachen Modelle den Vorteil, analytisch oder auch numerisch voll verstanden werden zu können. Solche “Minimalmodelle” (Moiseev und Svirezhev, 1979) sind daher bestens geeignet, die grundlegenden Prozesse, die zwischen Geosphäre und Biosphäre wirken, zu beschreiben. Insbesondere kann auf diesen Modelltyp das Instrumentarium der Theorie Dynamischer Systeme (Schuster, 1989; Ott et al., 1994) angewendet werden. Die *semi-quantitative* Modellierung liefert allgemeine Aussagen über das Systemverhalten, ohne von der gewählten *quantitativen* Parametrisierung abhängig zu sein. Maßgeblich ist vielmehr das *qualitative* Verhalten.

Die aus der semi-quantitativen Modellierung des Klima-Biosphärensystems hervorgegangenen dynamischen Systeme zeichnen sich durch Multistabilität aus. Der jetzige Zustand des Erdsystems kann daher als ein Zustand aus einer Vielzahl möglicher Biosphären gesehen werden. Die Erdevolution läßt sich in diesem “virtuellen Biosphärenkonzept” (Svirezhev und von Bloh, 1998) als Folge von Bifurkationen auffassen.

Aktualität und Bedeutung gewinnt dieser Zugang durch die Global Change Problematik: Das Erdsystem wird durch die Menschheit u.a. durch Änderung der Atmosphärenzusammensetzung massiv gestört. Erste Ergebnisse dieses globalen Experiments können im IPCC Report (Bolin et al., 1996) nachgelesen werden. Bei der Vorhersage solcher anthropogen induzierter Veränderungen stößt man immer wieder auf ein grundlegendes Problem: Experimente mit dem Erdsystem als ganzes sind nicht möglich. In internationalen Forschungsprogrammen (WCRP) (WCRP, 1994) und IGBP (IGBP, 1994) wird deshalb versucht, ein komplexes, analoges Modell des Erdsystems zu gewinnen. Deren Entwicklung wird aber in absehbarer Zukunft nicht abgeschlossen sein, zudem ist die Analyse fast ebenso komplex wie das Erdsystem selbst. Diese Problematik zeigt sich – wie schon oben bei der Vegetationsmodellierung erwähnt – in allen Teilbereichen eines allumfassenden Erdsystemmodells. Der hier vorgestellte Ansatz, mit stark vereinfachten Modellen in der Erdsystemanalyse zu arbeiten (siehe auch Schellnhuber und Wenzel, 1998), kann diese Schwierigkeiten umgehen und Orientierung für die “Analogmodellierung” geben.

1.2 Beispiele geophysiologischer Regelungsprozesse im Erdsystem

Die postulierten geophysiologischen Regelprozesse sind nicht nur Ergebnis theoretischer Modelle, sondern lassen sich auch in der Realität finden. An zwei Beispielen soll dies illustriert werden.

DMS-produzierende Bakterien. Als Beispiel von auf der Erde zu beobachtende geophysiologische Regulationsprozesse lassen sich zunächst Dimethylsulfid (DMS)-produzierende Bakterien anführen (Charlson et al., 1987), die über Wolkenbildung regulativ auf das Erdklima einwirken. Dabei wirkt das von den Bakterien abgegebene DMS als Kondensationskeim für Wolkenbildung. Bei Temperaturerhöhung steigt durch die gesteigerte Bioproduktivität die DMS-Konzentration in der Atmosphäre. Die dadurch erzielte vermehrte Wolkenbildung verringert die Temperatur durch die höhere Albedo. Diese negative Rückkopplung bewirkt eine Selbststabilisierung der Temperatur. Zum anderen ermöglicht die DMS-Abgabe einen Transport der Bakterien durch Aerosole in der Luft. Die induzierte Wolkenbildung stimuliert Aufwinde, mit denen Bakterien in die Atmosphäre transportiert werden (Hamilton und Lenton, 1998).

Karbonat-Silikat-Verwitterung. Als weiteres Beispiel kann die Karbonat-Silikat-Verwitterung angesehen werden, die die globale Temperatur über geologische Zeiträume stabilisiert. Durch den Verwitterungsprozeß wird CO_2 permanent aus der Atmosphäre entfernt und in Karbonat-Silikat Gestein fixiert. Über Vulkanismus wird der Atmosphäre dagegen CO_2 zugeführt, so daß sich schließlich ein Gleichgewicht zwischen Quellen und Senken einstellt. Die Verwitterung nimmt dabei mit der globalen mittleren Temperatur exponentiell zu, während die Quelle in einer ersten Näherung als konstant angenommen wird. Bei Erhöhung der Temperatur wird also mehr CO_2 aus der Atmosphäre entfernt, so daß aufgrund des verminderten Treibhauseffekts die Temperatur sinkt. Somit stellt sich eine negative Rückkopplung ein, die sich stabilisierend auf die Globaltemperatur auswirkt, wobei die Biosphäre zusätzlich verstärkend auf die Verwitterung einwirkt.

Basierend auf einer Arbeit von Lovelock und Whitfield (1982) haben Caldeira und Kasting (1992) ein rückgekoppeltes Modell einer solchen Wechselwirkung entwickelt, um damit die Lebensspanne der Biosphäre abschätzen zu können. Da die Leuchtkraft der Sonne beständig zunimmt, verringert sich die CO_2 -Konzentration in der Atmosphäre, bis für die photosynthetisch aktiven Organismen der untere Schwellwert für die Photosynthese erreicht wird (≈ 10 ppm für C_4 Pflanzen) und zu deren Aussterben führt. Abb. 1.1 zeigt die Globaltemperatur bei ansteigender solaren Einstrahlung für den Zeitraum von 3.5 Milliarden Jahre für das rückgekoppelte Caldeira-Kasting-Modell. Die gestrichelte Linie gibt dabei die Entwicklung der Temperatur bei konstantem CO_2 (entsprechend dem heutigen Wert) an. Es ist deutlich der auf die Globaltemperatur stabilisierend wirkende Einfluß der Verwitterung zu erkennen. Die Temperaturentwicklung bei konstanter CO_2 -Konzentration liefert für die Vergangenheit Temperaturen unter 0°C , was im Widerspruch zu der Tatsache steht, daß es seit 3.8 Ga flüssiges Wasser auf der Erdoberfläche gegeben hat (Sagan und Mullen, 1972). Rückgekoppelte geophy-

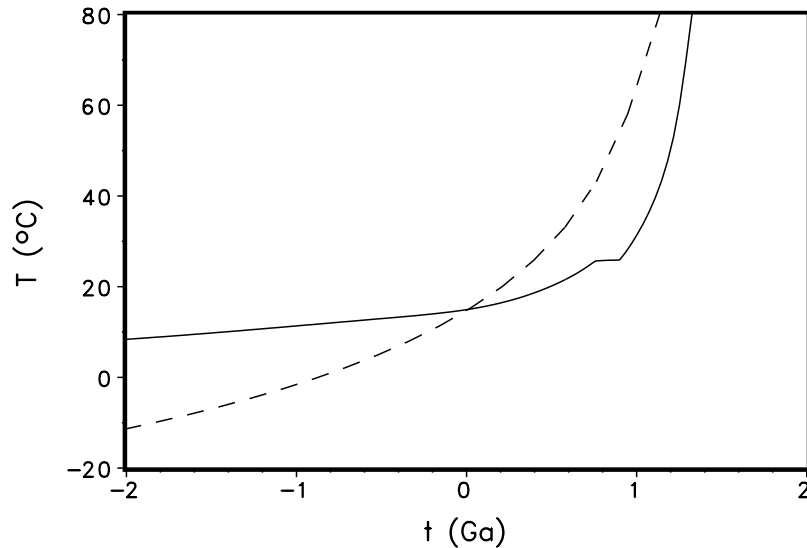


Abbildung 1.1: Entwicklung der globalen Temperatur bei ansteigender solaren Einstrahlung. Die gestrichelte Linie gibt die Entwicklung bei konstanter, auf den heutigen Wert fixierten CO_2 -Konzentration in der Atmosphäre an.

siologische Systeme können also eine Erklärung für das sogenannte “Faint Young Sun”-Paradoxon liefern, d.h. die Existenz von flüssigem Wasser bei einer in der Vergangenheit geringeren solaren Einstrahlung. Die Biosphäre übt dabei einen katalytischen Einfluß auf die Verwitterung aus, indem die CO_2 -Konzentration im Boden erhöht wird. Neuere Arbeiten zu diesem Thema berücksichtigen die Geodynamik der Erde aufgrund veränderter Kontinentflächen und vulkanischer Aktivität als der Hauptsenke und -quelle von CO_2 (Franck et al., 1999a; Franck et al., 1999b).

1.3 Gliederung der Arbeit

Die vorliegende Arbeit ist in folgende Teile gegliedert: Zuerst wird das Daisy-World-Modell in seiner Ursprungsformulierung vorgestellt und hinsichtlich seiner Systemeigenschaften analysiert. Durch diffusive Kopplung gelangt man dann zu einer räumlich eindimensionalen Formulierung des Modells. Im nächsten Teil wird ein allgemeinerer Ansatz zur Klima-Vegetationskopplung angegangen. Mit Hilfe zweier grundlegender Annahmen über die Produktivität und der Albedoabhängigkeit werden die universellen Eigenschaften (Bestimmung der Gleichgewichtslösungen und deren Stabilität) eines solchen Modells untersucht. Insbesondere können nichtlineare Wellenlösungen des räumlichen Modells identifiziert werden, wobei diese Eigenschaften auch auf das Daisy-World-Modell übertragen

werden können. Dieses einfache Modell wird dann um einen globalen Kohlenstoffkreislauf erweitert.

Im daran anschließenden Teil wird das Daisy-World-Modell wieder aufgegriffen und zu einem räumlich 2-dimensionalen Modell erweitert. Dabei wird eine Formulierung als zellulärer Automat gewählt, so daß die Differentialgleichung in einen endlichen Satz nicht-deterministischer Regeln transformiert werden kann. Die Regeln werden dabei so gewählt, daß die räumlich homogene Lösung dem ursprünglichen Daisy-World-Modell entspricht. Das so modifizierte Modell erlaubt die Koexistenz beliebig vieler Arten. Zudem ist durch die räumlich explizite Formulierung die Modellierung von Fragmentierungen der Wachstumsfläche möglich. Insbesondere der Einfluß der Fragmentierung auf die Artenverteilung und dem Selbstregulationsvermögen des Systems soll dabei näher betrachtet werden.

Abschließend werden die Ergebnisse aus den verschiedenen Zugängen zur geophysiologischen Modellierung zusammengefaßt.

Kapitel 2

Lovelock-Watson-Modell ("Daisy-World")

2.1 Modellbeschreibung

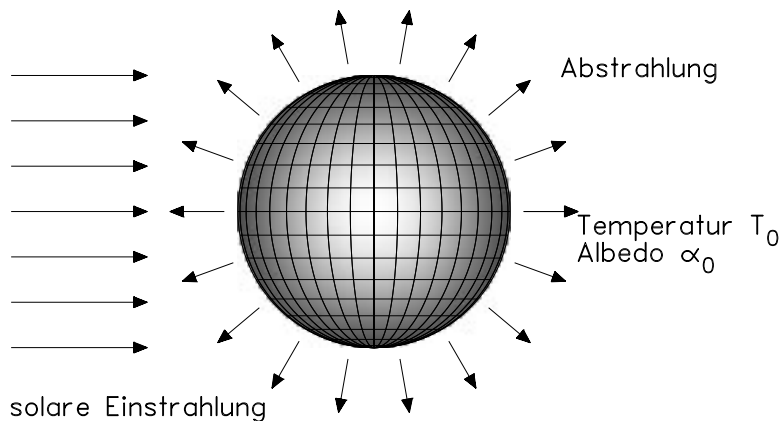


Abbildung 2.1: Strahlungsbilanz des Planeten. Die Temperatur ergibt sich aus dem Gleichgewicht zwischen Ab- und Einstrahlung.

Das im Bereich der geophysiologischen Modellierung als eine Art "Spielzeugmodell" von Watson und Lovelock (1983) vorgestellte Daisy-World-Modell soll im folgenden kurz beschrieben werden. In diesem Modell (Abb. 2.1) wird von einem Planeten mit einer Oberflächenalbedo α_0 ausgegangen. Die Absorption kurzwelliger Strahlung hängt von der Oberflächenalbedo in der Form

$$\hat{S}(1 - \alpha_0) \quad (2.1)$$

ab. Die Emission im langwelligen (thermischen) Bereich ergibt sich aus

$$\sigma_B T^4, \quad (2.2)$$

mit $\sigma_B = 4\sigma$, σ Stefan-Boltzmann Konstante. Die Gleichgewichtstemperatur $T_0(\hat{S})$ bestimmt sich durch Gleichsetzen von (2.1) und (2.2) zu

$$T_0(\hat{S}) = \left(\frac{\hat{S}(1 - \alpha_0)}{\sigma_B} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (2.3)$$

deren Wert von der solaren Einstrahlung $\hat{S}$ abhängt. Der Planet kann von zwei verschiedenen Arten von Vegetation bewachsen werden, die sich nur in ihrer Albedo unterscheiden:

1. Art 1 mit Albedo $\alpha_1 < \alpha_0$ und Flächenanteil N_1
2. Art 2 mit Albedo $\alpha_2 > \alpha_0$ und Flächenanteil N_2

Die unterschiedliche Rückstrahlungsfähigkeit bezieht sich nur auf den Bereich kurzwelliger, sichtbarer Strahlung, das Emissionsverhalten beider Arten im langwelligen (thermischen) Bereich ist identisch. Wenn man die Gesamtfläche des Planeten auf 1 normiert, so berechnet sich die unbewachsene Restfläche x zu

$$x = 1 - N_1 - N_2,$$

womit die erlaubten Werte von N_1 bzw. N_2 auf das Intervall $[0, 1]$ eingeschränkt sind. Die mittlere Albedo α des Planeten im sichtbaren Bereich bestimmt sich dann zu

$$\alpha = N_1 \alpha_1 + N_2 \alpha_2 + x \alpha_0,$$

so daß die mittlere Gleichgewichtstemperatur T des Planeten aufgrund der Strahlungsbilanz nach

$$\sigma_B T^4 = \hat{S}(1 - \alpha) \quad (2.4)$$

berechnet wird. Als nächstes müssen die lokalen Temperaturen T_1 , T_2 der beiden Arten ermittelt werden, die wegen der unterschiedlichen Albedo von der mittleren Temperatur abweichen. Dazu werden Strahlungsbilanzgleichungen jeweils für die von der Art 1 und 2 bedeckten Fläche aufgestellt:

$$\begin{aligned} \sigma_B T_i^4 &= \hat{S}(1 - \alpha_i) + k((1 - \alpha) - (1 - \alpha_i)) \\ &= \hat{S}(1 - \alpha) + (\hat{S} - k)(\alpha - \alpha_i) \\ &= \sigma_B T^4 + q(\alpha - \alpha_i) \quad \text{mit } q = \hat{S} - k \end{aligned} \quad (2.5)$$

Der Parameter k gibt dabei die Größe des Energieaustausches zwischen den Arten an. $k = 0$ bedeutet dabei eine thermische Isolation der beiden Arten, während für

$k = \hat{S}$ (entspricht $q = 0$) die lokalen Temperaturen gleich der mittleren Temperatur T sind (vollständiger Temperatúrausgleich). Da $q > 0$ gilt, ist die lokale Temperatur T_i stets kleiner als die mittlere Temperatur, falls α_i größer als die mittlere Albedo α ist.

Für das Wachstum beider Arten wird ein möglichst einfacher Ansatz gewählt. Die Wachstumsrate soll in einem Temperaturtoleranzintervall $(T_{\min}, T_{\max})$ größer Null sein. Für $(T_{\min} + T_{\max})/2$ soll diese Funktion ihr Maximum annehmen. Eine mögliche Realisation stellt eine parabelförmige Funktion $\beta(T)$ der Form

$$\beta(T) = \begin{cases} \frac{4}{\Delta T^2}(T - T_{\min})(T_{\max} - T) & , T_{\min} < T < T_{\max} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \quad (2.6)$$

mit $\Delta T = T_{\max} - T_{\min}$ dar, die in Abb. 2.2 graphisch dargestellt ist und sich für beide Arten nicht unterscheidet. Das Wachstumsverhalten der beiden Arten kann daher nur aufgrund der lokal unterschiedlichen Temperaturen voneinander abweichen.

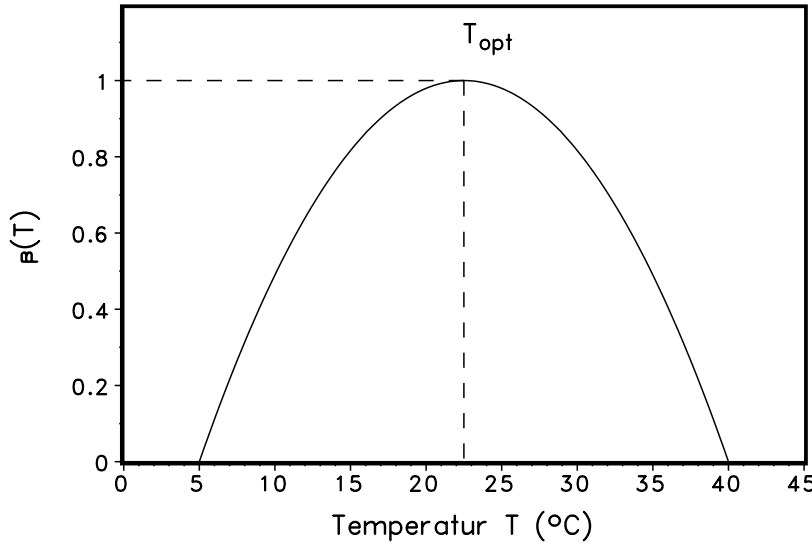


Abbildung 2.2: Graphische Darstellung der gewählten Wachstumsfunktion $\beta(T)$ als Funktion der Temperatur.

Die zeitliche Entwicklung für die Flächenanteile N_1 bzw. N_2 wird durch ein nichtlineares dynamisches System bestimmt:

$$\begin{aligned} \dot{N}_1 &= f_1(N_1, N_2) = N_1(\beta(T_1)x - \gamma) \\ \dot{N}_2 &= f_2(N_1, N_2) = N_2(\beta(T_2)x - \gamma) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Parameter	Wert
α_0	0.5
α_1	0.25
α_2	0.75
σ_B	$5.75 \cdot 10^{-5}$
$\hat{S}_0$	$9.17 \cdot 10^5$
q	$2.06425 \cdot 10^9$
$T_{\min}$	5
$T_{\max}$	40
γ	0.1

Tabelle 2.1: Parameterwahl des Lovelock-Watson-Modells für die Simulationen entsprechend Watson und Lovelock (1983).

γ bezeichnet dabei eine konstante, von der Art oder Temperatur unabhängige Sterberate. Dieses einfache nichtlineare Zweigleichungssystem läßt sich in seiner zeitlichen Entwicklung analytisch nicht mehr lösen und muß daher numerisch integriert werden.

Betrachtet wird nun das Verhalten des Systems bei kontinuierlicher Erhöhung der solaren Einstrahlung S , d.h.

$$\hat{S} = \hat{S}(t) = \hat{S}_0(1 + s \cdot t).$$

Zur Vereinfachung wird die solare Einstrahlung in Einheit der solaren Einstrahlung gemessen, die dem Gleichgewicht des vegetationslosen Planeten, d.h. für Albedo $\alpha \equiv \alpha_0$ bei der optimalen Wachstumstemperatur T_{opt} entspricht, d.h.:

$$\hat{S} = S \frac{\sigma_B T_{\text{opt}}^4}{1 - \alpha_0}$$

Numerisch wird das System mit einem Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung mit adaptiver Steuerung der Schrittweite (z.B. durch den in (Press et al., 1988) beschriebenen Algorithmus und dessen Implementierung in der Funktion `odeint`). Die Parameter wurden von Watson und Lovelock (1983) übernommen (Tab. 2.1). Das Ergebnis für die mittlere Temperatur T und der Vegetationsflächenanteile N_1 , N_2 ist in Abb. 2.3 in Abhängigkeit von S graphisch dargestellt. Im Vergleich dazu ist gestrichelt die mittlere Temperatur des unbelebten Planeten eingezeichnet, dessen zeitliche Entwicklung sich in einem Intervall von $S = [1, 2]$ kraß von der des belebten Planeten unterscheidet. Die globale Temperatur des Planeten wird durch die Existenz der Vegetation für einen großen Bereich von S nahezu konstant gehalten. Es lassen sich dabei mehrere Bereiche unterscheiden: Für $S \in [1.85, 2]$ existiert

nur eine Art ($N_1 \neq 0$), während für das Intervall $[1, 1.85]$ beide Arten koexistieren. Schließlich existiert nur noch die Art mit der höheren Albedo. Eine analytische Bestimmung dieser Bereiche wird Inhalt des nächsten Abschnittes sein.

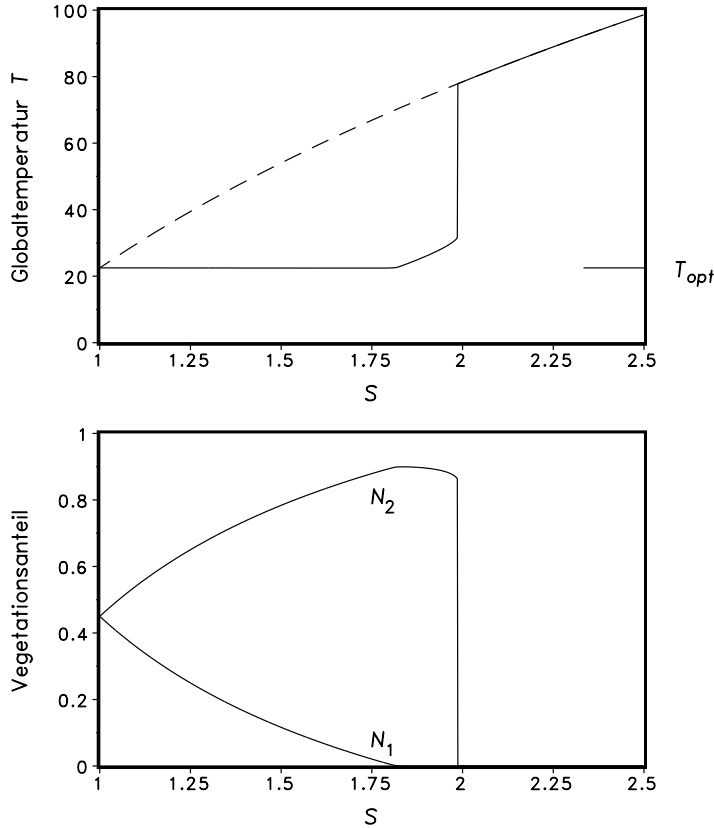


Abbildung 2.3: Zeitliche Entwicklung des Lovelock-Watson-Modells bei Erhöhung der solaren Einstrahlung S . Oberes Bild: Globaltemperatur T als Funktion der solaren Einstrahlung S , wobei die gestrichelte Linie die Temperaturentwicklung des unbelebten Planeten angibt. Unterres Bild: Korrespondierende Entwicklung der von Art 1 und Art 2 bedeckten Flächen N_1 bzw. N_2 .

2.2 Fixpunktanalyse

2.2.1 Bestimmung der Fixpunkte

Eine ausführliche Analyse des Lovelock-Watson-Modells findet sich in (Saunders, 1994). Dessen Analyse wird in diesem Abschnitt kurz nachvollzogen, um dann

um die Bestimmung des Regelbereichs in Abhängigkeit der Vegetationsalbedo und der Habitatfragmentierung erweitert zu werden.

Das System (2.7) nimmt für konstante S stets eine stationäre Lösung an. Diese stationären Lösungen sind die Fixpunkte des dynamischen Systems, die sich aus der Bedingung

$$\dot{N}_1 = 0 \wedge \dot{N}_2 = 0 \quad (2.8)$$

bestimmen lassen. Da die $\dot{N}_i$ laut Gl. 2.7 multiplikativ von den N_i abhängen, lassen sich 3 Fälle für Gl. 2.8 unterscheiden:

1. $N_1 = 0 \wedge N_2 = 0$
2. $N_1 = 0, N_2 > 0 \vee N_2 = 0, N_1 > 0$ (Existenz genau einer Art)
3. $N_1 \neq 0 \wedge N_2 \neq 0$ (Koexistenz beider Arten)

Alle 3 Fälle werden der Reihe nach diskutiert:

1. $N_1 = 0 \wedge N_2 = 0$: Dieser Fixpunkt entspricht dem Zustand des unbelebten Planeten, für die sich die mittlere Temperatur direkt aus Gl. 2.3 bestimmen läßt.
2. $N_1 = 0 \vee N_2 = 0$: Aus der Bedingung $\dot{N}_1 = 0$ bei $N_1 > 0$ folgt

$$\beta(T_1)(1 - N_1) - \gamma = 0. \quad (2.9)$$

Setzt man (2.6) und (2.4) in (2.9) ein, so erhält man eine implizite Gleichung, die nur noch von N_1 abhängt. Numerische Nullstellensuche liefert dann den Fixpunkt für $N_1 > 0$ und $N_2 = 0$. Gl. 2.4 liefert dann die zugehörige global Mitteltemperatur T . Analog berechnet sich der Fixpunkt für $N_2 > 0$.

3. $N_1 > 0 \wedge N_2 > 0$: Für den Koexistenzfixpunkt muß gelten:

$$\beta(T_1)x - \gamma = \beta(T_2)x - \gamma \quad (2.10)$$

Da die unbedeckte Fläche x und γ für beide Seiten der Gl. 2.10 übereinstimmen, gilt weiter:

$$\begin{aligned} \beta(T_1) &= \beta(T_2) \\ T_1 &= T_{\text{opt}} - T_2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Aus dieser Bedingung folgt sofort, daß eine Koexistenz in einem stationären Zustand nur mit maximal 2 Arten möglich ist! Subtrahieren der Gleichungen 2.6 für T_1, T_2 voneinander und Ersetzen von T_2 laut Gl. 2.11 liefert den Ausdruck

$$T_1^4 - T_2^4 = T_1^4 - (T_1 - T_{\text{opt}})^4 = \hat{S}(\alpha_2 - \alpha_1),$$

der sich als Polynom 3. Ordnung nach T_1 auflösen läßt. Durch Einsetzen der Lösung in (2.4) und (2.9) lassen sich N_1, N_2 und die mittlere Temperatur T für den Koexistenzfixpunkt bestimmen.

2.2.2 Stabilitätsanalyse der Fixpunkte

Linearisieren des Differentialgleichungssystems am Fixpunkt $\{N_1^*, N_2^*\}$ und Bestimmen der Eigenwerte der resultierenden Jacobi-Matrix

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial N_1}(N_1^*, N_2^*) & \frac{\partial f_1}{\partial N_2}(N_1^*, N_2^*) \\ \frac{\partial f_2}{\partial N_1}(N_1^*, N_2^*) & \frac{\partial f_2}{\partial N_2}(N_1^*, N_2^*) \end{pmatrix}$$

ermöglicht qualitative Aussagen bezüglich der Stabilität der Lösungen in einer Umgebung des Fixpunktes. Für das vorliegende 2-dimensionale System läßt sich das Verhalten nach den Vorzeichen der beiden Eigenwerte λ_1 und λ_2 von J klassifizieren:

1. $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ Falls beide Eigenwerte negativ sind, liegt ein attraktiver Fixpunkt vor: Der Fixpunkt ist stabil.
2. $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ Es liegt ein hyperbolischer Fixpunkt vor. Nur in Richtung eines Eigenvektors ist der Fixpunkt attraktiv, sonst repulsiv.
3. $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ Der Fixpunkt ist repulsiv und damit instabil.

Für das Lovelock-Watson-Modell lassen sich alle Fixpunkte für unterschiedliche solare Einstrahlungen S bestimmen und deren Stabilität analysieren.

Das Ergebnis ist in Abb. 2.4 graphisch dargestellt, wobei die solare Einstrahlung gegenüber der mittleren Temperatur der stationären Zustände aufgetragen ist. Durchgezogene Linien bedeuten, daß die jeweilige Lösung stabil ist, während gestrichelt die instabilen Zustände eingezeichnet sind, für die mindestens ein Eigenwert der Jacobi-Matrix positiv ist.

Betrachtet man Abb. 2.4 genauer, so fällt auf, daß für ein Intervall von S zwei Fixpunkte stabil sind, es liegt also ein bistabiler Zustand vor. Welche der beiden stabilen Lösungen erreicht wird, hängt dabei von den Anfangswertbedingungen von $N_1^{(0)}, N_2^{(0)}$ ab.

In Abb. 2.5 sind Phasenraumportraits für verschiedene Werte von S dargestellt. In Abb. 2.5a ist nur der Fixpunkt mit $N_{1,2} = 0$ stabil, während in Abb. 2.5c der Koexistenzfixpunkt und der Fixpunkt mit $N_{1,2} = 0$ stabil sind. Die Attraktionsgebiete für die nichttrivialen Fixpunkte mit $N_{1,2} > 0$ fallen relativ klein aus, geringe Störungen führen zu einem Verlassen des Attraktionsgebiets und zum Erreichen des Fixpunkts mit $N_{1,2} = 0$.

Die Fixpunktanalyse erlaubt eine schnelle und genaue Bestimmung der Intervalle von S , in dem Leben möglich ist, d.h. in dem mindestens eine der Lösungen mit $N_i > 0$ stabil ist. Man kann nun für alle Kombinationen von Albeden α_1, α_2

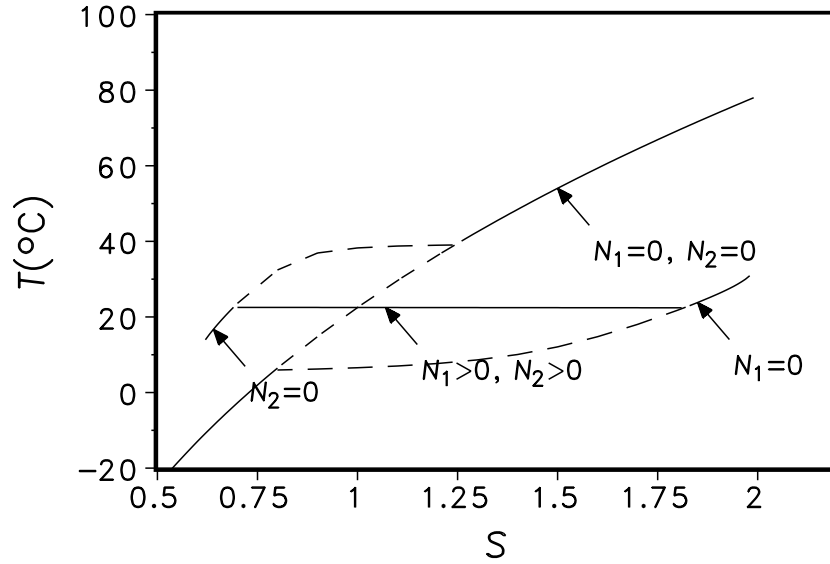


Abbildung 2.4: Mittlere Temperatur T als Funktion der solaren Einstrahlung S für die verschiedenen Fixpunkte des Systems. Gestrichelt gezeichnet sind die instabilen Lösungen, für die mindestens ein Eigenwert positiv ist.

der beiden Arten den Existenzbereich für Leben bestimmen. In Abb. 2.6 ist die Größe

$$w := \frac{\text{maximale Einstrahlung } S_{\max}}{\text{minimale Einstrahlung } S_{\min}}$$

für α_1, α_2 im Intervall $[0, 1]$ dargestellt. Man erkennt, daß w maximal für $\alpha_1 = 0$ und $\alpha_2 = 1$ wird. Die untere Schranke wird durch die Bedingung

$$T = \left(\frac{\hat{S}}{\sigma_B} \right)^{\frac{1}{4}} > T_{\min}$$

für $\alpha_1 = 0$ bestimmt. Aber auch für $\alpha_2 = 1$ gibt es für den Stabilitätsbereich überraschenderweise eine obere Schranke für die solare Einstrahlung, obwohl für $\alpha \rightarrow 1$ beliebig tiefe Gleichgewichtstemperaturen erreicht werden könnten. Da aber auch für optimale Wachstumsrate $\beta = 1$ der Gleichgewichtswert für $N_2^* = 1 - \gamma < 1$ ist, gilt für Albedo α :

$$\alpha = \gamma \alpha_0 + (1 - \gamma) \alpha_2$$

Und damit wird mit

$$T = \left(\frac{S(1 - \alpha)}{\sigma_B} \right)^{\frac{1}{4}} < T_{\max}$$

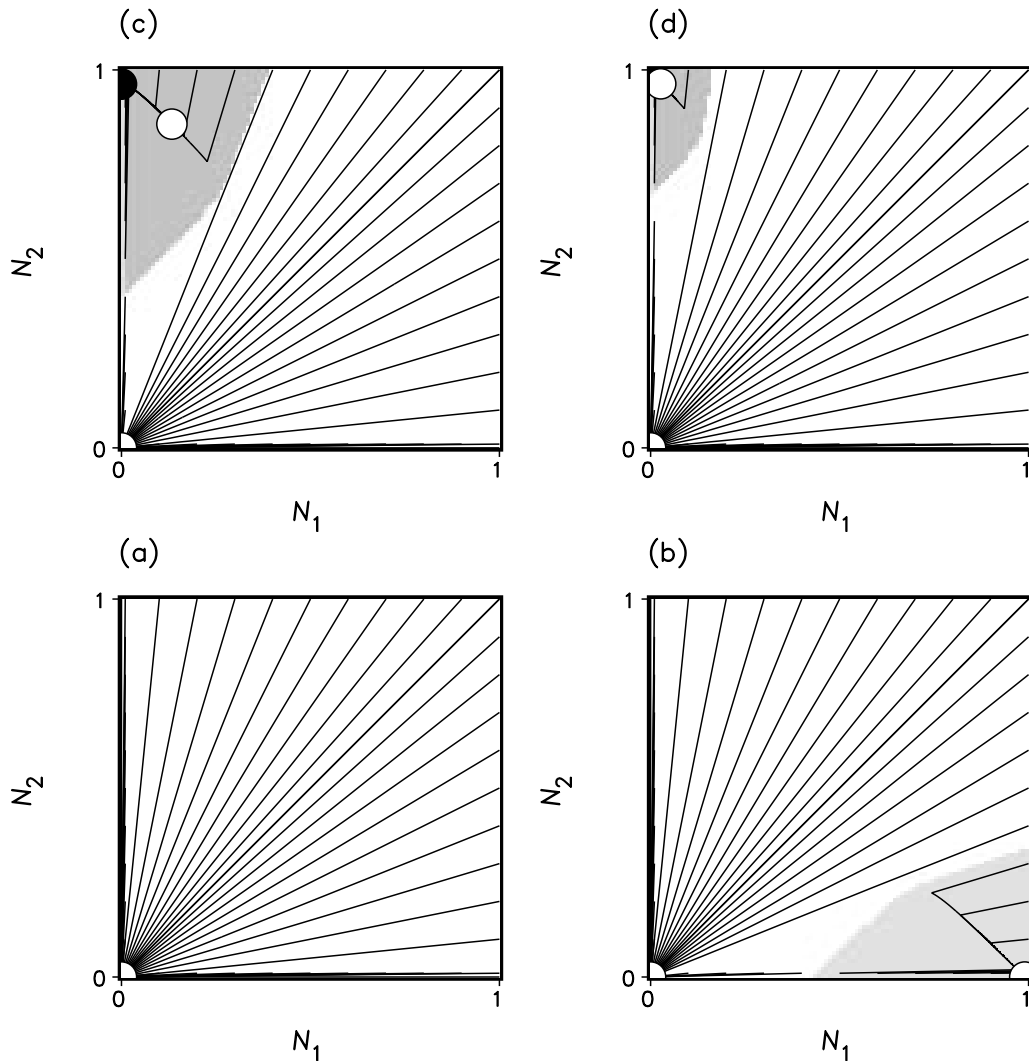


Abbildung 2.5: Phasenraumportraits im $\{N_1, N_2\}$ Raum für unterschiedliche solare Einstrahlungen S ((a) $S = 0.5$, (b) $S = 0.62$, (c) $S = 1.5$, (d) $S = 1.8$). Die Linien sind Trajektorien des dynamischen Systems, die Kreise bezeichnen dessen Fixpunkte.

eine obere Schranke für S bestimmt.

2.3 Verhalten des Modells bei eingeschränkter Wachstumsfläche

Im vorherigen Abschnitt wurde insbesondere das Verhalten des Systems bei Änderung der solaren Einstrahlung untersucht. Im folgenden soll der zur Verfügung stehende Wachstumsraum auf dem Planeten eingeschränkt und dabei der Einfluß auf die Regelfähigkeit untersucht werden. Der den Pflanzen zur Verfügung stehende

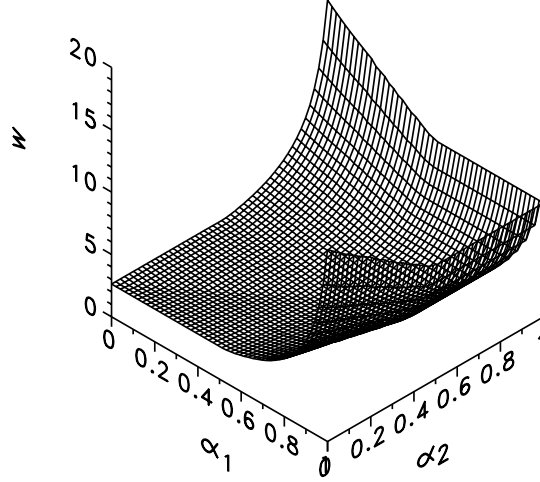


Abbildung 2.6: Existenzintervall $w = \frac{S_{\max}}{S_{\min}}$ für Leben in Abhängigkeit von den gewählten Werten für die Vegetationsalbedo α_1 und α_2 der beiden Arten.

Wachstumsraum

$$x = 1 - N_1 - N_2$$

wird zusätzlich um einen Anteil $p \in [0, 1]$ verringert. Das dynamische System (Gl. 2.7) ändert sich entsprechend

$$\begin{aligned}\dot{N}_1 &= N_1(\beta(T_1)(x - p) - \gamma) \\ \dot{N}_2 &= N_2(\beta(T_2)(x - p) - \gamma),\end{aligned}\tag{2.12}$$

wobei $p \in [0, 1]$ der nicht zu bewachsene Flächenanteil darstellt.

Mit den gleichen in Tab. 2.1 angegebenen Parametern wird das modifizierte dynamische System 2.12 numerisch für verschiedene konstant gehaltene Einstrahlungen S integriert. p wird dabei in Abhängigkeit von der Zeit linear auf den Wert 1 hochgefahren. Die Ergebnisse sind in Abb. 2.7 graphisch aufgetragen. In Abhängigkeit von der solaren Einstrahlung gibt es ein kritisches p , bei dem sich das Verhalten, charakterisiert durch die mittlere globale Temperatur T , plötzlich ändert. Betrachtet man parallel dazu die Verteilung der beiden Arten, so fällt dieser Punkt mit dem Aussterben einer Art zusammen. Das kritische p_{crit} ändert sich dabei mit der solaren Einstrahlung S , d.h. $p_{\text{crit}} \equiv p_{\text{crit}}(S)$.

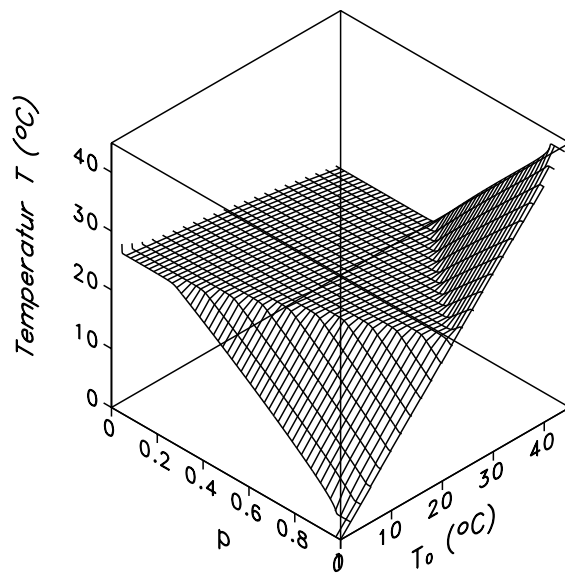


Abbildung 2.7: Mittlere Temperatur bei linearer Zunahme der nicht mehr bewachsbaren Fläche p für verschiedene solare Einstrahlungen S . $T_0 = T_0(S)$ bezeichnet dabei die Temperatur des vegetationslosen Planeten.

Kapitel 3

Eindimensionale Erweiterung des Lovelock-Watson-Modells

3.1 Modellbeschreibung

Das vorgestellte einfache Lovelock-Watson-Modell erlaubt in einem Gleichgewichtszustand nach Abschnitt 2.2 nur die Koexistenz von maximal 2 Arten. Um die Koexistenz mehrerer Arten zu ermöglichen, kann das Modell entweder a) um zeitliche Variationen oder b) räumliche Strukturen erweitert werden. In diesem Abschnitt soll der zweite Ansatz verfolgt und ein räumlich eindimensionales Lovelock-Watson-Modell vorgestellt werden, das Parametervariationen in einer Raumrichtung zuläßt (z.B. Zonierung des Planeten durch lokal variierende Einstrahlung), während das ursprüngliche Modell als nulldimensionale Näherung keine räumliche Abhängigkeiten zuläßt.

Durch Kopplung mehrerer Systeme entsprechend Gl. 2.7 über einen Diffusionsterm für die Temperatur und die Arten läßt sich ein jetzt räumlich eindimensionales System erzeugen, in dem in einem stationären Zustand die Koexistenz von mehr als 2 Arten möglich ist. Daher werden die beiden Größen N_1, N_2 durch Flächenanteile $N_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, ersetzt, so daß im Modell m Arten mit den Albeden $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ existieren können. Die zeitliche Entwicklung wird durch ein partielles Differentialgleichungssystem beschrieben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1(x,t)}{\partial t} &= N_1 \left(\beta(T_1(x,t)) \left(1 - \sum_{i=1}^m N_i(x,t) \right) - \gamma \right) + D_N \frac{\partial^2 N_1(x,t)}{\partial x^2} \\ &\vdots \\ \frac{\partial N_m(x,t)}{\partial t} &= N_m \left(\beta(T_m(x,t)) \left(1 - \sum_{i=1}^m N_i(x,t) \right) - \gamma \right) + D_N \frac{\partial^2 N_m(x,t)}{\partial x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} &= S(x)(1 - \alpha(x,t)) - \sigma_B T(x,t)^4 + D_T \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \\
\sigma_B T_i(x,t)^4 &= \sigma_B T(x,t)^4 + q(\alpha - \alpha_i) \\
\alpha(x,t) &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^m (\alpha_i - \alpha_0) N_i(x,t)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Die lokalen Temperaturen $T_i(x,t)$ werden analog zu Gl. 2.6 aus den mittleren Temperaturen $T(x,t)$ berechnet. Die solare Einstrahlung $S = S(x)$ kann nun räumlich in ihrem Wert variieren. Durch den Diffusionsterm für die Temperatur wird nicht nur der Wärmetransport über Wärmeleitung modelliert, sondern auch bei nicht zu großen Temperaturgradienten der Transport über Konvektion mit entsprechend höheren Diffusionskoeffizienten. D_T setzt sich also wie folgt zusammen:

$$D_T = k_{\text{Diffusion}} + k_{\text{Konvektion}}$$

Für die Atmosphäre kann sogar der Diffusionsanteil aufgrund der geringen Wärmeleitfähigkeit gegenüber dem Konvektionsanteil vernachlässigt werden. Die Diffusivität der Vegetation D_N wird als von der Art unabhängig angenommen.

Zusätzlich besitzt das System eine Wärmekapazität C . Das zeitliche Verhalten kann durch die Antwort des Systems auf eine sprunghafte Erhöhung der solaren Einstrahlung (Sprungantwort) charakterisiert werden. Bei homogener Einstrahlung des vegetationslosen Planeten bestimmt sich die zeitliche Änderung der Temperatur zu

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{C} (S(1 - \alpha_0) - \sigma_B T^4). \tag{3.2}$$

Die Gleichgewichtstemperatur T_0 mit $dT/dt = 0$ bestimmt sich dann aus der Lösung von

$$\sigma_B T_0^4 = S_0(1 - \alpha_0)$$

Linearisieren von 3.2 um die Gleichgewichtslösung des unbelebten Planeten liefert

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{C} ((S + 3S_0)(1 - \alpha_0) - 4\sigma_B T_0^3 T).$$

Das so linearisierte System läßt sich durch Separation der Variablen einfach lösen und man erhält (für $T(t=0) \equiv T_0$):

$$T(t) = \frac{1}{4} T_0 \left(\frac{S}{S_0} + 3 + \left(\frac{S}{S_0} - 1 \right) \exp^{-\frac{4\sigma_B T_0^3}{C} t} \right)$$

Die charakteristische Zeitkonstante ist also $\tau = 4\sigma_B T_0^3 / C$. Der hier vorgestellte Ansatz für die Temperaturbestimmung entspricht einem einfachen Energiebilanzmodell (EBM) (Henderson-Sellers und McGuffie, 1990).

Für eine numerische Simulation des eindimensionalen Systems muß es zeitlich und räumlich diskretisiert werden. Die räumliche Diskretisierung läßt sich auffassen als Aufteilung in eine endliche Zahl von Kompartimenten, die über Diffusionsterme gekoppelt sind. Für die Einteilung in M solcher Kompartimente ist $a_i(x)$ nur an den Stellen $x_j = j \cdot \Delta x$ definiert, so daß die zeitliche Entwicklung nach

$$\begin{aligned} \dot{N}_i(x_j) = & N_i(x_j) \left(\beta(T(x_j)) \left(1 - \sum_{k=1}^m \alpha_k N_k(x_j) \right) - \gamma \right) \\ & + \frac{D_N}{\Delta x^2} (N_i(x_{j+1}) + N_i(x_{j-1}) - 2N_i(x_j)) , \end{aligned} \quad (3.3)$$

mit $i = 1 \dots m$ und $j = 1 \dots M$ bestimmt wird. Entsprechend wird $T(x, t)$ nur für die diskreten Raumpunkte x_j bestimmt. Das partielle Differentialgleichungssystem ist durch die räumliche Diskretisierung auf ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem entsprechend höherer Dimension reduziert worden, welches durch numerische Verfahren analog zum räumlich nulldimensionalen Modell integriert werden kann.

3.2 Verhalten des Modells bei inhomogener Einstrahlung

Bei einer räumlich homogenen Einstrahlung $S(x) \equiv S$ ergeben sich räumlich homogene Lösungen für $N_i(x) \equiv N_i$ mit einer dem räumlich nulldimensionalen Modell identischen Lösungscharakteristik: In dem stationären Zustand existieren maximal 2 Arten mit einer räumlich homogenen Verteilung.

Dieses Verhalten ändert sich bei räumlich variabler Einstrahlung $S(x)$. Für eine kosinusförmige Einstrahlung

$$S(x) = S_0 \left(0.1 + S_x \cos \left(x \frac{\pi}{2} \right) \right) \quad x \in [-1, 1],$$

durch die eine von dem Breitengrad abhängige Bestrahlung des Planeten modelliert wird, und einer Einteilung in $M = 200$ Boxen mit periodischen Randbedingungen ergibt sich für die Parameterwahl bei verschwindender Diffusion der Vegetation

$$\begin{aligned} C &= 0.001 \\ D_N &= 0 \\ D_T &= 0.02 \\ S_x &= 1.4 \\ \alpha_i &= 0.1 \cdot i, i = 1, \dots, 9 \quad (m = 9) \end{aligned} \quad (3.4)$$

die in Abb. 3.1 angegebene stationäre Temperatur- bzw. Albedoverteilung. Alle nicht angegebenen Parameter sind äquivalent zu den im vorigen Abschnitt durchgeführten Simulationen gewählt.

Man erkennt, daß die Vegetation auf ein räumliches Gebiet beschränkt ist, in der aber die mittlere Temperatur konstant ist. An einem Raumpunkt x koexistieren maximal 2 Arten. Welche der Arten aus $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ in x koexistieren, hängt aber von der lokalen Einstrahlung $S(x)$ ab, so daß global gesehen mehrere Arten existieren können.

Schaltet man nun zusätzlich zur Wärmediffusion die Diffusion der Arten ein, d.h. wählt man $D_N > 0$, so können nun auch mehr als 2 Arten an einem Raumpunkt koexistieren (Abb. 3.2). Weiter ist zu beobachten, daß der vegetationsbedeckte Anteil des Planeten deutlich größer ist als in Abb. 3.1. Insbesondere ist jetzt die äquatoriale Zone mit Vegetation bedeckt. In höheren Breiten ($|x| > 0.5$) ist dabei eine Erhöhung der Zahl koexistierenden Arten zu beobachten.

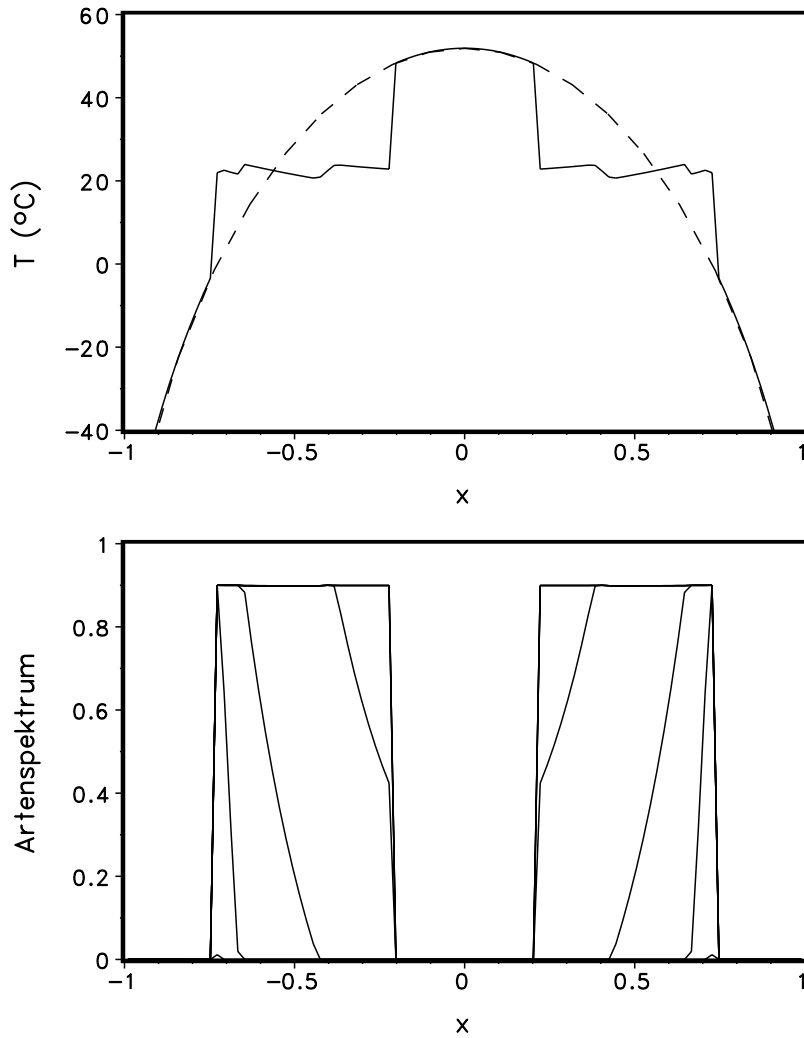


Abbildung 3.1: Gleichgewichtslösung des räumlich eindimensionalen Modells bei kosinusförmiger Einstrahlung und verschwindender Diffusion der Arten ($D_N \equiv 0$). Oberes Bild: Mittlere lokale Temperatur $T(x)$ gegenüber dem Ort x . Gestrichelt gezeichnet ist die Temperaturverteilung ohne Vegetation aufgrund der lokal unterschiedlichen Einstrahlung. Unteres Bild: Kumulatives Artenspektrum $\tilde{N}_i(x) = \sum_{j=1}^i N_j(x)$.

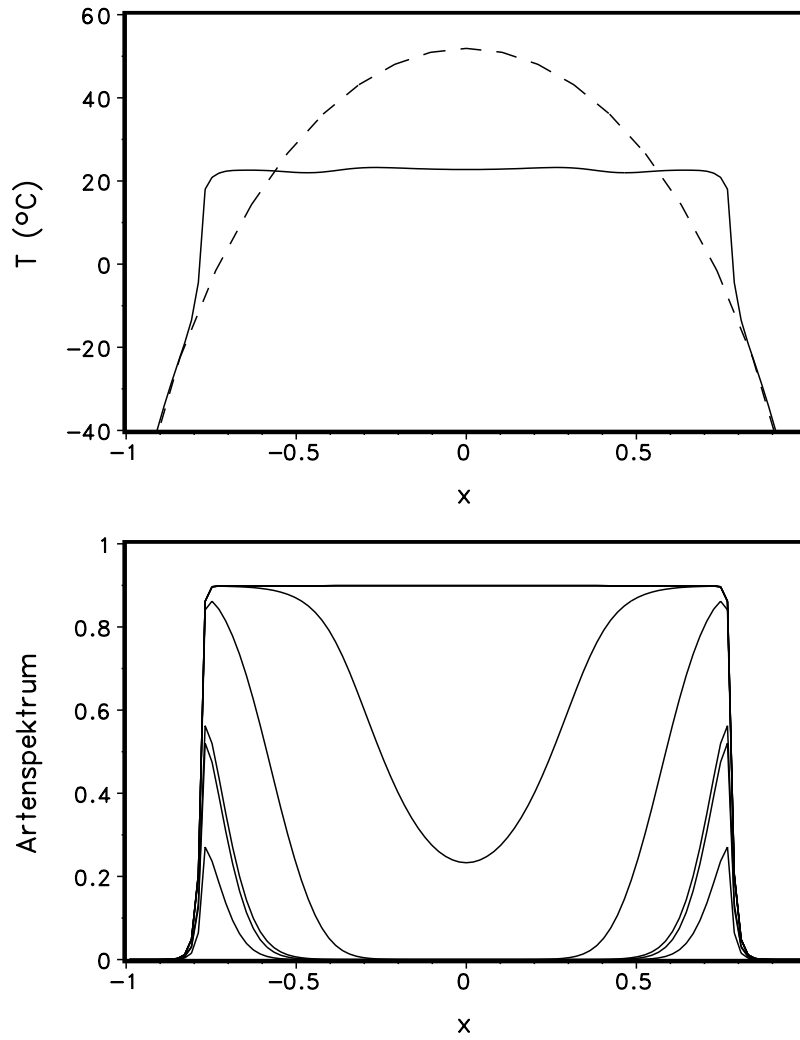


Abbildung 3.2: Stationäre Lösung des räumlich eindimensionalen Modell bei kosinusförmiger Einstrahlung bei $D_T, D_N > 0$. Oberes Bild: Mittlere lokale Temperatur $T(x)$ gegenüber dem Ort x . Gestrichelt gezeichnet ist die Temperaturverteilung ohne Vegetation aufgrund der lokal unterschiedlichen Einstrahlung. Unteres Bild: Kumulatives Artenspektrum $\tilde{N}_i(x) = \sum_{j=1}^i N_j(x)$.

Kapitel 4

Allgemeine Formulierung der Klima-Biosphärenkopplung

4.1 Modellbeschreibung

In dem folgenden Abschnitt wird der Bereich des Lovelock-Watson-Modells verlassen und ein allgemeinerer Zugang zur Beschreibung der Klima-Biosphärenkopplung gesucht. Dabei geht man von einer *semi-quantitativen* Beschreibungsweise aus, d.h. das Systemverhalten wird durch die qualitative Form des Modells bestimmt, während der Simulationslauf mit quantitativ bestimmten Parametrisierungen durchgeführt wird. Die Modellbeschreibung erfolgte zuerst in (Svirezhev und von Bloh, 1996).

Die Modell betrachtet einen räumlich eindimensionalen Planeten mit Ringtopologie. Analog zum Lovelock-Watson-Modell wird das Klima des Modellplaneten durch die Oberflächentemperatur $T(x,t)$ beschrieben, für deren Dynamik die folgende Energiebilanzgleichung gilt:

$$\kappa \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \hat{S}(1 - \alpha) - 4\sigma_B T^4, \quad x \in \Omega, \quad (4.1)$$

wobei κ die Wärmekapazität, Ω die Fläche des Planeten, α die Oberflächenalbedo am Raumpunkt x , $\hat{S}$ die Solarkonstante bezeichnet, so daß der Term $\hat{S}(1 - \alpha)$ die Einstrahlung, und $4\sigma_B T^4$ die Abstrahlung darstellt (identisch zum Daisy-World-Modell im Abschnitt 2.1). Die Abstrahlung läßt sich auch gemäß Budyko formulieren: $a + bT$ (Budyko, 1969), führt aber zu keiner prinzipiellen Änderung der Dynamik, sondern liefert zusammen mit den empirisch bestimmten Konstanten a, b eine bessere Parametrisierung der Strahlungsbilanz der Erde. Übereinstimmend mit dem Lovelock-Watson-Modell bleiben wir bei der Parametrisierung der Abstrahlung nach Gl. 2.2.

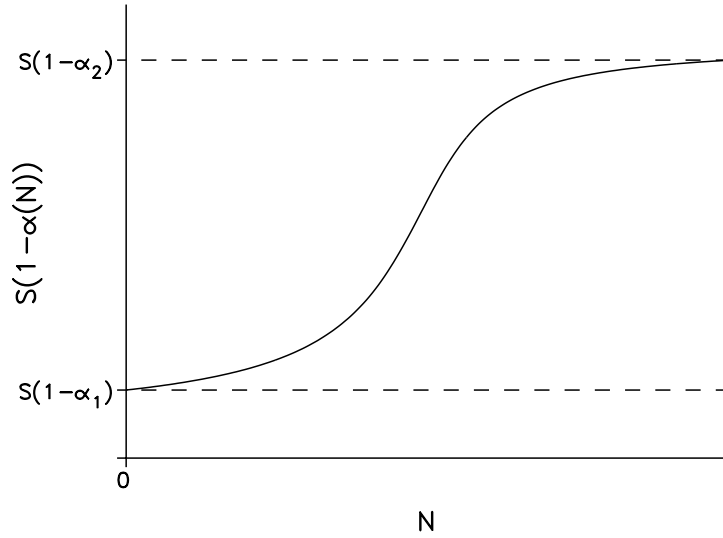


Abbildung 4.1: Qualitative Verhalten des Einstrahlterms $\Psi(N)$ als Funktion der Vegetation N .

Umschreiben der Gl. 4.1 liefert:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \Psi - \sigma T^4, \text{ mit } D_T = k/\kappa, \sigma = 4\sigma_B/\kappa, \Psi = \frac{\hat{S}}{\kappa}(1 - \alpha) \quad (4.2)$$

Als weiteres kann die Planetenoberfläche von Vegetation mit der Dichte $N(x, t) \geq 0$ bedeckt werden, deren zeitliche Entwicklung durch die um einen Diffusionsterm erweiterte logistische Gleichung

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D_N \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \beta N - \gamma N^2 \quad (4.3)$$

beschrieben wird.

Mit der Formulierung von zwei Annahmen wird die Klima-Vegetations-Rückkopplung festgelegt.

Annahme 1 Die Albedo α hängt nur von der Vegetationsdichte N ab mit $\alpha = \alpha(N)$ als eine monoton fallende Funktion von N .

Die Vegetation verringert also kontinuierlich die Albedo des Planeten mit zunehmender Dichte. Z.B. ist die Albedo von Wüstensand 0.4, während waldbedeckte Flächen eine niedrigere Albedo von ≈ 0.1 haben (Robock, 1980). Das Lovelock-Watson-Modell mit einer Art mit $\alpha_1 < \alpha_0$ bzw. $N_2 \equiv 0$ erfüllt auch diese Annahme. Die Funktion $\Psi(N)$ hat dann eine Abb. 4.1 gemäße Form mit $\Psi'_N(N) \geq 0$. Es soll $\Psi'_N > 0$ für alle $N > 0$ gelten.

Annahme 2 Die Wachstumsfunktion β hängt nur von T ab; β ist eine unimodulare Funktion von T (siehe Abb. 2.3).

Offensichtlich ist dann $\beta'_T > 0$ für $T < T_{\text{opt}}$, und $\beta'_T < 0$ für $T > T_{\text{opt}}$, $\beta(T) > 0$ für $T \in (T_{\text{min}}, T_{\text{max}})$.

Die Funktion $\beta(T)$ definiert die “ökologische Nische” im Klimaraum, die durch das Intervall von T bestimmt wird, für das die Bedingung $\beta(T) > \gamma$ gilt. Diese Annahme ist auch für das Lovelock-Watson-Modell gültig.

Die Gleichungen 4.2 und 4.3 zusammen mit den Funktionen $\alpha(N)$ und $\beta(T)$ und den entsprechenden Anfangs- und Randwertbedingungen ergeben dann die vollständige Beschreibung der Klima-Biosphärenkopplung des Modellplaneten.

4.2 Analyse der homogenen Biosphäre

Als erstes werden die Lösungen des homogenen Systems, d.h. die Lösungen, die nicht explizit von der Raumkoordinate x abhängen, analysiert. Das folgende, aus Gl. 4.2 und 4.3 abgeleitete nichtlineare dynamische System beschreibt die zeitliche Entwicklung der homogenen Biosphäre:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial t} &= \Psi(N) - \sigma T^4, \\ \frac{\partial N}{\partial t} &= \beta(T)N - \gamma N^2.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Die weitere Analyse des allgemeinen räumlich abhängigen Systems zeigt, daß die wichtigsten Eigenschaften aus der Analyse von (4.4) gewonnen werden können.

Zuerst werden die Gleichgewichtspunkte $T(t) = T^* = \text{const}$, $N(t) = N^* = \text{const}$ von Gl. 4.4 bestimmt, die die Bedingungen

$$\begin{aligned}T^* &= (\Psi(N^*)/\sigma)^{\frac{1}{4}}, \\ N^* &= 0 \quad \vee \quad N^* = \beta(T^*)/\gamma.\end{aligned}\tag{4.5}$$

erfüllen müssen. Eine graphische Darstellung des Phasenraums $\{N, T\}$ klärt das qualitative Verhalten des Modells: Abhängig vom Wert $\hat{S}$ können 6 Fälle unterschieden werden, die sich in der Zahl und Position der Schnittpunkte von Kurve (I): $N = \beta(T)/\gamma$ und (II): $T = (\Psi(N)/\sigma)^{\frac{1}{4}}$ (siehe Abb. 4.2a-f). Die Schnittpunkte der beiden Kurven erfüllen Gl. 4.5 und sind somit Fixpunkte von (4.4). Bis zu drei Fixpunkte, die mit $a = \{N_a^*, T_a^*\}$, $b = \{N_b^*, T_b^*\}$ und $c = \{N_c^*, T_c^*\}$ bezeichnet werden, können auftreten. Die Fixpunkte a in Abb. 4.2a-f sind *semi-triviale* Gleichgewichtspunkte mit

$$N^* = 0 \quad \text{und} \quad T^* = (\Psi/\sigma)^{\frac{1}{4}}.$$

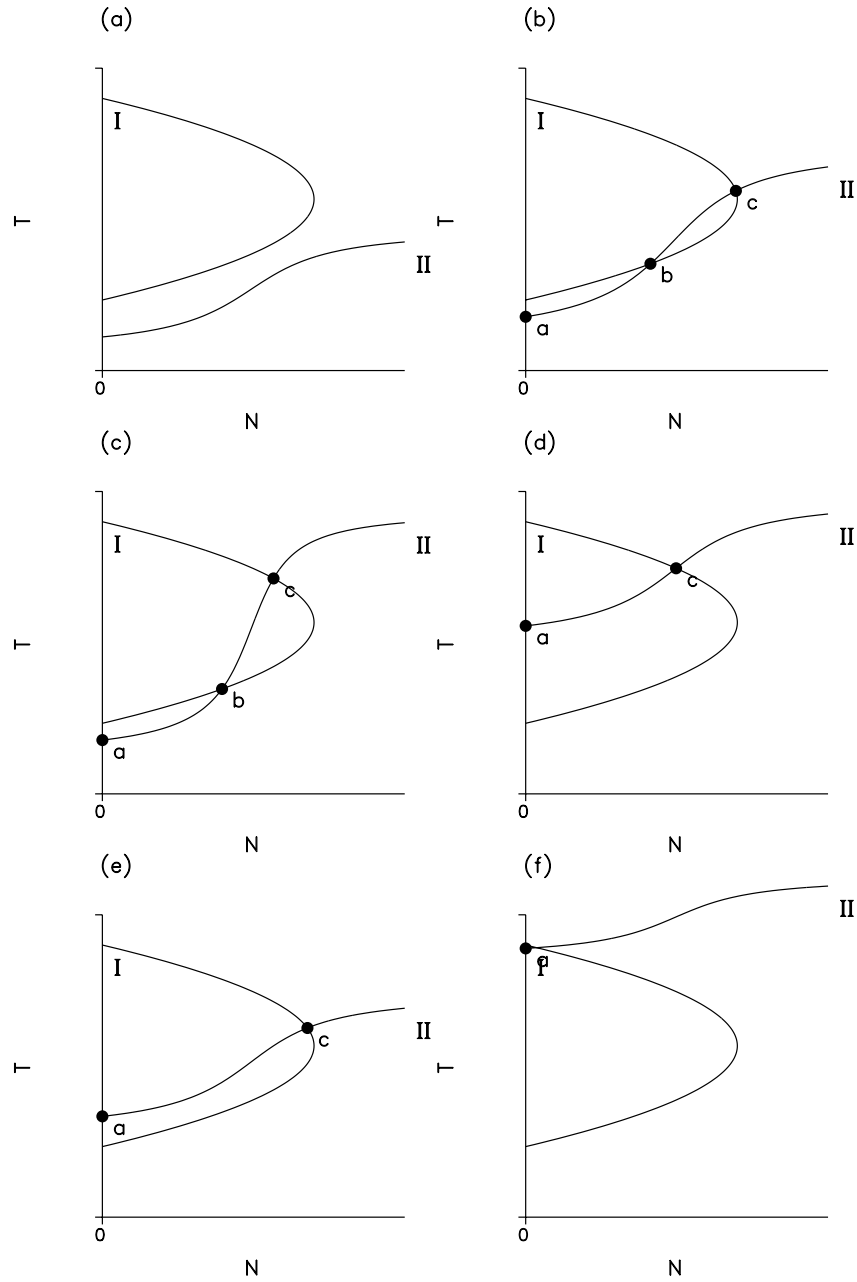


Abbildung 4.2: Phasenraumportraits des dynamischen Systems (4.5) für verschiedene solare Einstrahlungen $\hat{S}$. Die Fixpunkte ergeben sich aus den Schnittpunkten der Kurven $I: N = g(T)/\gamma$ und $II: T = (\Psi(N)/\sigma)^{\frac{1}{4}}$ und sind mit a-c bezeichnet.

Der Modellplanet kann für $T^* < T_{\min}$ als “Kältewüste” bezeichnet werden, für $T^* > T_{\max}$ als “Hitzewüste”.

Die Eigenwerte der $\lambda_{1,2}$ der Jacobi-Matrix

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial T}(\Psi(N) - 4\sigma T^4) & \frac{\partial}{\partial N}(\Psi(N) - 4\sigma T^4) \\ \frac{\partial}{\partial T}(\beta(T)N - \gamma N^2) & \frac{\partial}{\partial N}(\beta(T)N - \gamma N^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\sigma T^{*3} & \Psi'_N(N) \\ \beta'_T(T)N & \beta(T) - 2\gamma N \end{pmatrix}$$

berechnen sich für (4.4) und $N^* > 0$ zu

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ -(\gamma N^* + 4\sigma T^{*3}) \pm \sqrt{(\gamma N^* + 4\sigma T^{*3})^2 - 4N^*(4\gamma\sigma T^{*3} - \beta'_T(T^*)\Psi'_N(N^*))} \right\}.$$

Die Vorzeichen der λ_i beschreiben das Verhalten des Systems in der Umgebung der Fixpunkte $\{N^*, T^*\}$:

1. $\lambda_{1,2} < 0, \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$: $\{N^*, T^*\}$ ist ein *stabiler Knoten*.
2. $\text{Re}(\lambda_{1,2}) < 0, \lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$: $\{N^*, T^*\}$ ist ein *Fokus*.
3. $\lambda_1 \lambda_2 < 0$: $\{N^*, T^*\}$ ist ein *Sattelpunkt*.
4. $\lambda_{1,2} > 0$: $\{N^*, T^*\}$ ist ein *instabiler Knoten*.

Ist einer der Eigenwerte λ_i gleich Null, so ist eine Analyse nächsthöherer Ordnung notwendig.

Für die “semitrivialen” Fixpunkte mit $N^* = 0$ gilt

$$\lambda_1 = \beta(T^*) \quad , \quad \lambda_2 = -4\sigma T^{*3}.$$

Wenn entweder $T^* < T_{\min}$ oder $T^* > T_{\max}$, dann ist dieses Gleichgewicht $\{N^* = 0, T^*\}$ stabiler Knoten ($\lambda_{1,2} < 0$), falls $T_{\min} < T^* < T_{\max}$, dann ist der Fixpunkt ein Sattelpunkt ($\lambda_1 \lambda_2 < 0$).

Für das “nichttriviale” Gleichgewicht mit $N^* = \beta(T^*)/\gamma > 0$ gelten folgende Aussagen:

- $\beta'_T(T^*)\Psi'_N(N^*) < 4\sigma\gamma T^{*3}$: Fixpunkt $\{N^*, T^*\}$ ist entweder *stabil* oder *Fokus*
- $\beta'_T(T^*)\Psi'_N(N^*) > 4\sigma\gamma T^{*3}$: Fixpunkt ist *Sattelpunkt*.
- Falls Bedingung

$$(4\sigma T^{*3} - \gamma N^*)^2 + 4N^*\beta'_T(T^*)\Psi'_N(N^*) < 0 \quad (4.6)$$

erfüllt ist, dann ist der Fixpunkt $\{N^*, T^*\}$ ein Fokus, sonst ein *stabiler Knoten* oder *Sattelpunkt*.

Da das System nur zwei Phasenraumvariablen T und N besitzt, enden nach dem Poincaré-Bendixson Theorem die Trajektorien in einem stabilen Knoten oder einem Grenzzyklus. Darüber hinaus erhält man bei Anwendung des Dulac-Kriteriums (Hale und Kocak, 1991) in der Form

$$\begin{aligned} F(T, N) &= \frac{\partial}{\partial T} \left\{ \frac{1}{N} (\Psi(N) - \sigma T^4) \right\} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial N} \left\{ \frac{1}{N} \cdot N(\beta(T) - \gamma N) \right\} = \\ &= -\frac{4\sigma T^3}{N} - \gamma < 0 \end{aligned}$$

die Aussage, daß im positiven Quadranten $N > 0$, $T > 0$ keine Grenzzyklen existieren. Daher läßt sich folgern:

Es liegt eine einfache Phasenraumstruktur vor; alle Trajektorien enden in Fixpunkten.

Diese Aussage ist auch für das Lovelock-Watson-Modell mit einer Art ($N_2 \equiv 0$) gültig.

Im folgenden werden die Phasenraumportraits von (4.4) bezüglich der Zahl und Lage der Fixpunkte und deren Stabilitätsverhalten untersucht. In Abb. 4.3a ist der Punkt a ein stabiler Knoten, der Endzustand des Planeten ist für alle Anfangsbedingungen die "Kältewüste" ohne jegliche Vegetation. Dieser Zustand existiert, falls

$$T_{\min} > (\Psi_1/\sigma)^{\frac{1}{4}}.$$

Für $T_{\min} > (\Psi_1/\sigma)^{\frac{1}{4}}$, aber $T_c^* < T_{\text{opt}}$, ändert sich das Bild: (Abb. 4.3b): Der Punkt a ist ein stabiler Knoten, b ist ein Sattelpunkt und c ist ein stabiler Knoten, sofern $\beta'_T(T_c^*) > 0$. Die singuläre Trajektorie des Sattelpunkts b teilt den Quadranten $N > 0, T > 0$ in zwei Attraktionsgebiete. Die Existenz von Vegetation hängt dabei von den Anfangsbedingungen für Temperatur und Vegetation ab.

Gilt $T_c^* > T_{\text{opt}}$ (Abb. 4.3c) und zusätzlich die Ungleichung (4.6) (für $T_c^* = T_{\text{opt}}$ gilt diese Ungleichung nicht), dann ist der Punkt c ein stabiler Fokus, der Punkt a wie bisher ein stabiler Knoten und b eine Sattelpunkt. Bei $T_a^* > T_{\min}$ ändert sich das Phasenraumportrait (Abb. 4.3d,e): Punkt a wird Sattelpunkt, c bleibt hingegen stabiler Knoten oder Fokus. In Abb. 4.3f wird Punkt a zum stabilen Knoten, der der "Hitzewüste" entspricht ($N_a^* = 0, T_a^* > T_{\max}$).

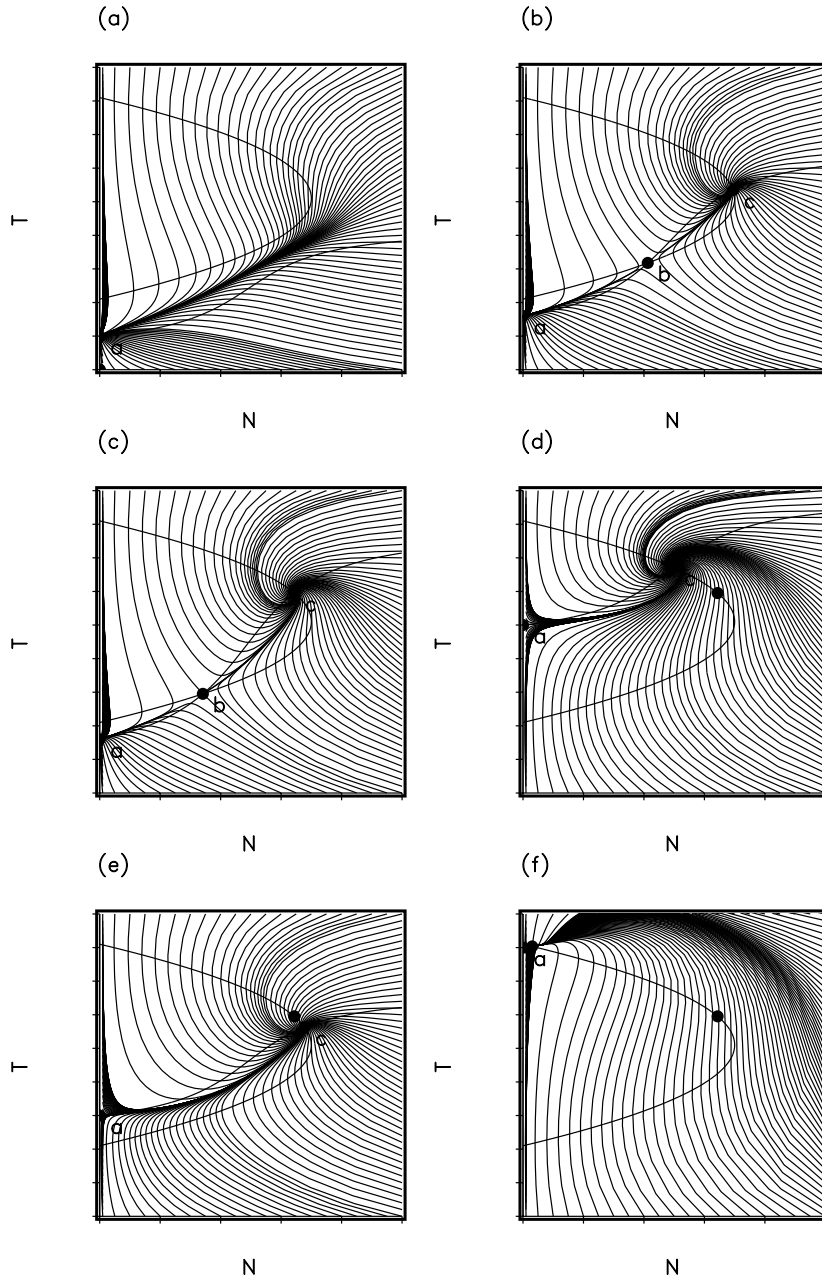


Abbildung 4.3: Phasenraumportrait von (4.4) entsprechend Abb. 2.5 mit (a) $T_a^* < T_{\min}$ ("Kältewüste"), (b) $T_c^* < T_{\text{opt}}$, (c) $T_c^* < T_{\text{opt}}$. (d,e) $T_a^* > T_{\min}$, (f) $T^* > T_{\max}$.

4.3 Existenz von dissipativen Strukturen, diffusive Instabilität

Die lokale Stabilitätsanalyse der Fixpunkte beantwortet nicht die Frage nach der Existenz von dissipativen Strukturen, d.h. räumlich heterogenen Lösungen. Eine Antwort kann dabei durch den Test auf diffusiver Instabilität gegeben werden (siehe Levin, 1976, und Svirezhev, 1978).

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für diffusive Instabilität ist die Gültigkeit der folgenden Ungleichung (an den entsprechenden Fixpunkten):

$$D_T \Phi'_N + D_N F'_T > 2\sqrt{D_T D_N (F'_T \Phi'_N - F'_N \Phi'_T)}, \quad (4.7)$$

wobei $\Phi = \beta(T)N - \gamma N^2$; $F = \Psi(N) - \sigma T^4$. Von Gl. 4.7 erhält man

$$(\beta(T^*) - 2\gamma N^*)D_T - 4\sigma T^{*3}D_N > 2\sqrt{D_T D_N (F'_T \Phi'_N - F'_N \Phi'_T)}, \quad (4.8)$$

mit $F'_T = -4\sigma T^{*3}$; $\Phi'_N = \beta(T^*) - 2\gamma N^*$; $F'_N = \Psi'_N(N^*)$; $\Phi'_T = \beta'_T(T^*)N^*$.

Für $N^* = 0$ liefert Gl. 4.8 die Bedingung

$$\beta(T_0^*)D_T - 4\sigma T_0^{*3}D_N > 2\sqrt{D_T D_N (-4\sigma T_0^{*3} \cdot \beta(T_0^*))}.$$

Offensichtlich muß $\beta(T_0^*)$ immer negativ sein, d.h. dieses Gleichgewicht ist ein stabiler Knoten, jedoch gilt die Ungleichung dann nicht für alle Werte von T_0^* , D_T and D_N .

Für das nichttriviale Gleichgewicht mit $N^* > 0$, erhält man

$$-\gamma N^* D_T - 4\sigma T^{*3} D_N > 2\sqrt{D_T D_N N^* (4\gamma \sigma T^{*3} - \beta'_T \Psi'_N)},$$

so daß auch hier keine diffusiven Instabilitäten auftreten.

Abschließend läßt sich sagen, daß für das gegebene Modell keine räumlich heterogenen Gleichgewichtslösungen existieren.

4.4 Ausbreitung von Störungen

Das Ausgangsmodell besteht aus zwei nichtlinearen parabolischen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= D_T \Delta T + \Psi(N) - \sigma T^4 \\ \frac{\partial N}{\partial t} &= D_N \Delta N + \beta(T)N - \gamma N^2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Da keine inhomogenen Gleichgewichtslösungen existieren, können wir uns auf Wellenlösungen von (4.9), d.h. Lösungen in der Form

$$\begin{aligned} T(x,t) &= T(x+vt) \\ N(x,t) &= N(x+vt), \end{aligned} \quad (4.10)$$

mit der Wellengeschwindigkeit $v = \text{const}$ und den Anfangsbedingungen, die diese Wellen erzeugen, konzentrieren: $T(x,0) = T_0(x)$ und $N(x,0) = N_0(x)$ müssen Funktionen mit kompaktem Träger sein. Einsetzen von (4.10) in (4.9) liefert (sei $\xi = x + vt$):

$$\begin{aligned} vT' &= D_T T'' + \Psi(N) - \sigma T^4, \\ vN' &= D_N N'' + \beta(T)N - \gamma N^2. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Dieses zweidimensionale System zweiter Ordnung läßt sich in ein System von 4 Gleichungen erster Ordnung transformieren, wenn zwei Phasenraumvariable p und q hinzugefügt werden:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{d\xi} &= p, \\ \frac{dp}{d\xi} &= \frac{v}{D_T} p + \frac{\sigma T^4}{D_T} - \frac{\Psi(N)}{D_T}, \\ \frac{dN}{d\xi} &= q, \\ \frac{dq}{d\xi} &= \frac{v}{D_N} q - \frac{\beta(T)N}{D_N} + \frac{\gamma N^2}{D_N} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Bedingung für das Gleichgewicht von (4.12) ist, daß p und q Null sind. Dann sind die Fixpunkte von (4.4) auch Fixpunkte der beiden restlichen Gleichungen von (4.12). Zu bedenken ist aber, daß sich die Dimensionen beider Systeme unterscheiden.

Der folgende Abschnitt behandelt primär die Entstehung solcher propagierenden Wellen und deren Verhalten bei unterschiedlichen Anfangsbedingungen für T und N . Da eine dafür notwendige explizite Lösung von (4.12) nicht analytisch möglich ist, wird die weitere Analyse mit numerischen Methoden betrieben.

Das ursprüngliche System (4.9) wurde für verschiedene Anfangsbedingungen der Art

$$\begin{aligned} T(x,0) &= T_0 = (\Psi(0)/\sigma)^{\frac{1}{4}} \\ N(x,0) &= R_w(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |x| \leq w/2 \\ 0 & \text{falls } |x| > w/2 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.13)$$

gelöst. $N(x,0)$ ist definiert auf einem kompakten Träger $[-w/2, w/2]$ und erfüllt damit die notwendige Voraussetzung zur Entstehung von nichtlinearen Wellen.

Von jetzt an sind $N(x,t)$ und $T(x,t)$ definiert auf einer endlichen "Welt" $\Omega = [-L, L]$, für die die Randbedingungen $x = -L, L$ erklärt sein müssen. Periodische Randbedingungen

$$\begin{aligned} N(-L,t) &= N(L,t) \\ T(-L,t) &= T(L,t) \end{aligned} \quad (4.14)$$

wurden gewählt, die eine Ringtopologie auf Ω definieren.

Die numerische Rechnungen wurden mit einem adaptiven Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung durchgeführt, nachdem die partiellen Differentialgleichungen durch ein Finite-Differenzen Verfahren in ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem höherer Ordnung umgeformt wurde. Die numerischen Rechnungen wurden für einen Parametersatz w und T_0 , d.h. verschiedenen solaren Einstrahlungen $\hat{S}$, durchgeführt und folgende Eigenschaften festgestellt:

Für $T_0 < T_{\min}$ hängt die zeitliche Entwicklung vom Parameter w (der Breite der anfänglichen rechteckförmigen Störung) ab (siehe Abb. 4.4a,b). Für w kleiner als ein kritischer Wert w_{crit} hingegen verschwinden die Lösungen $N(x,t)$ in der Zeit, d.h.:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(x,t) = 0 \quad \text{falls} \quad w < w_{\text{crit}}$$

Bei $w > w_{\text{crit}}$ kann jedoch die Ausbreitung von nichtlinearen Wellen mit einer konstanten Ausbreitungsgeschwindigkeit v beobachtet werden (siehe Abb. 4.4b).

Eine Erklärung kann gefunden werden, wenn man das System mit dem äquivalenten System der homogenen Biosphäre vergleicht: Für die gewählte Temperatur T_0 sind zwei Gleichgewichte mit $N^* = 0$ und $N^* > 0$ stabil (siehe auch Abb. 4.3a). Es hängt nur von dem Startwert von N ab, welcher von beiden Zuständen angenommen wird. Das räumliche Modell zeigt ein dazu analoges Verhalten, wobei die Breite der Anfangsstörung den Endzustand festlegt.

Die einfachste Annahme, daß die Gesamtmenge an Vegetation N , quantifiziert durch

$$N_{\text{total}} = \int_{\Omega} N(x,0) dx$$

ein Kriterium für das Auftreten von nichtlinearen Wellen liefert, ist aber nicht richtig. Vielmehr muß die geometrische Anordnung mit berücksichtigt werden. Um dies zu demonstrieren, wird eine Konfiguration aus zwei rechteckförmigen Störungen ($w < w_{\text{crit}}$, $2w > w_{\text{crit}}$) mit dem Abstand δ gewählt:

$$\begin{aligned} N(x,0) &= R_w \left(x - \frac{\delta}{2} \right) + R_w \left(x + \frac{\delta}{2} \right) \quad , \quad w < w_c \\ N_{\text{total}} &= \int_{-L}^L N(x,0) dx = 2w > w_{\text{crit}} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Jede der rechteckförmigen Störungen R_w für sich ($\delta \rightarrow \infty$) geht gegen Null für $T_0 < T_{\min}$. Für $\delta = w$ jedoch ergibt sich

$$N(x, 0) = R_w(x - w/2) + R_w(x + w/2) = R_{2w}(x),$$

welche in der Zeit mit nichtlinearen Wellen sich ausbreitet. Die Wellenlösungen treten sogar auf, wenn die Bedingung $\delta > w$ erfüllt ist (Abb. 4.5b), während für große δ die Störungen verschwinden (Abb. 4.5a).

Das Auftreten von nichtlinearen Wellen läßt sich auch bei dem in Abschnitt 3 vorgestellten räumlich eindimensionalen Erweiterung des Lovelock-Watson-Modells beobachten. Startet man mit einer Temperatur-Artenverteilung des Modells analog zu Gl. 4.13, so kann man die Ausbreitung der Vegetation in Form von nichtlinearen Wellen beobachten. Abb. 4.6 zeigt die kumulative Verteilung der Vegetation für verschiedene Zeiten $t = n\Delta t$. Der konstante Abstand der Kurven impliziert eine konstante Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle, deren Form sich nicht signifikant ändert. Das Verhalten entspricht qualitativ der Abb. 4.4b.

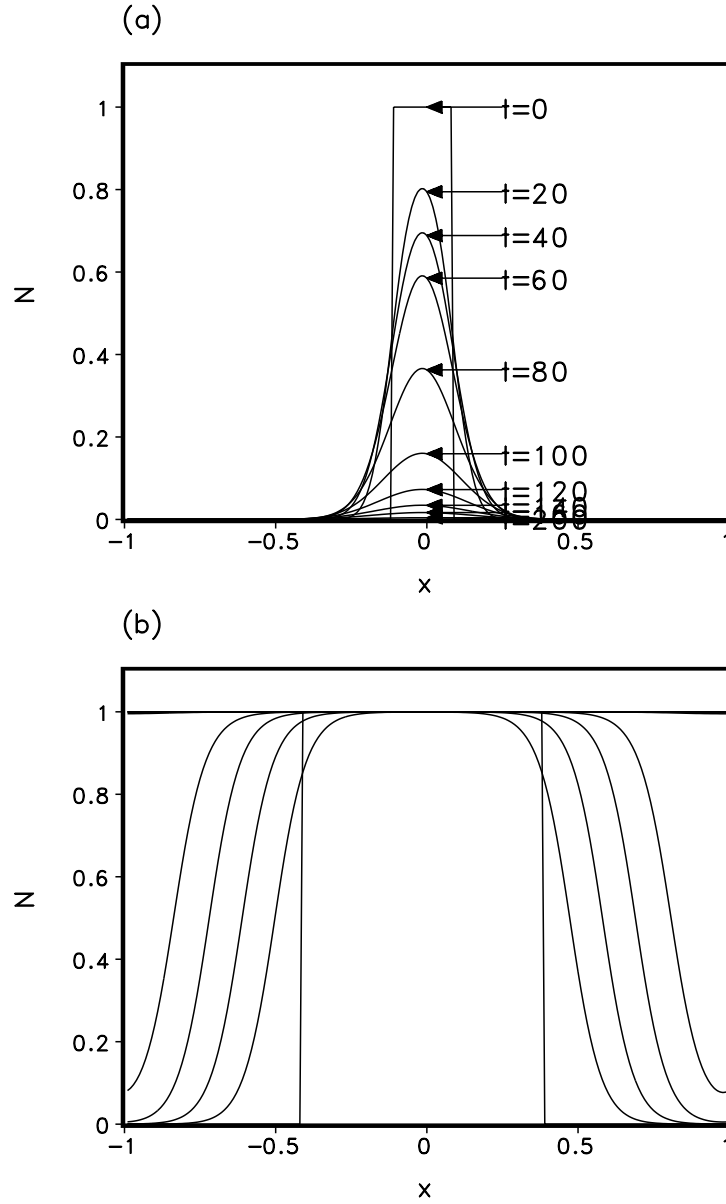


Abbildung 4.4: Zeitliche Entwicklung der Vegetation $N(x,t)$ für eine rechteckförmige Störung mit (a) $w < w_{\text{crit}}$, (b) $w > w_{\text{crit}}$. Die Markierung an den Kurven in (a) geben die Zeit t an. Die äquidistanten Kurven in (b) deuten auf eine konstante Ausbreitungsgeschwindigkeit der nichtlinearen Welle hin.

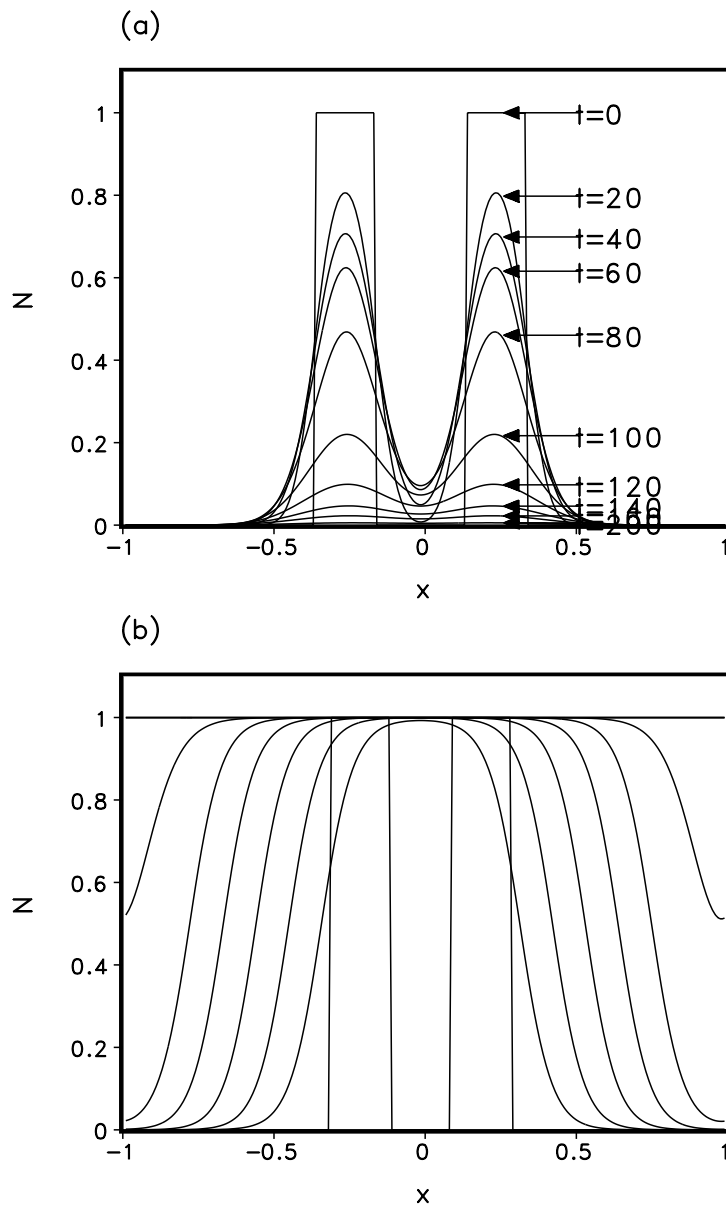


Abbildung 4.5: Zeitliche Entwicklung der Anfangsstörungen nach Gl. 4.15 für (a) große δ und (b) kleine δ .

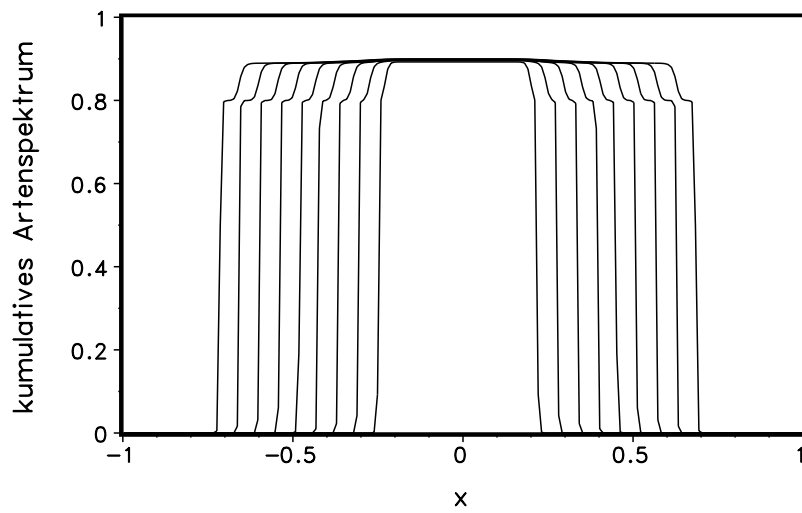


Abbildung 4.6: Kumulativer Vegetationsanteil für das eindimensionale Daisy-World-Modell für verschiedene Zeiten $t = n\Delta t$. Der konstante Abstand der Kurven läßt auf eine konstante Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen schließen.

Kapitel 5

Erweiterung des Klima-Biosphärenmodells um den Kohlenstoffzyklus

5.1 Modellbeschreibung

Das im vorigen Abschnitt entwickelte Modell soll in seiner räumlich nulldimensionalen Form um einen Kohlenstoffkreislauf erweitert werden. Um den Treibhauseffekt des atmosphärischen Kohlenstoffs zu berücksichtigen, wird die im Abschnitt 4 aufgestellte Gleichung 4.1 für die Globaltemperatur in ihrer räumlich homogenen Form modifiziert:

$$k \frac{dT}{dt} = S(1 - \alpha) - \sigma \varphi_C(C) T^4. \quad (5.1)$$

Die Notationen k , S und σ in (5.1) entsprechen denen des vorigen Kapitels. Der Funktion $\varphi_C(C)$ beschreibt den Treibhauseffekt von CO_2 in der Atmosphäre (Goody, 1964; Petoukhov, 1995).

Um den Kohlenstoffkreislauf zu vereinfachen, werden die beiden Kompartimente Vegetation und Boden zu einem Kompartiment “Biosphäre” aggregiert. Die Gesamtmenge an Kohlenstoff in der Biosphäre wird mit $N(t)$ bezeichnet, die in der Atmosphäre analog mit $C(t)$. Dann gilt für die Dynamik

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= P(C, N, T) - mN, \\ \frac{dC}{dt} &= -P(C, N, T) + mN + e(t), \end{aligned}$$

wobei P die Produktivität, $m = 1/\tau_N$ (τ_N : Verweilzeit von Kohlenstoff in der Biosphäre) und $e(t)$ die jährliche (anthropogene) Emission bezeichnet.

Für die Gesamtmasse von Kohlenstoff gilt dann:

$$C(t) + N(t) = A_0 + \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau = A(t), \quad (5.2)$$

mit $A_0 = C(t_0) + N(t_0)$. Unter der Voraussetzung, daß $e(t) \ll A(t)$, ändert sich $A(t)$ nur sehr langsam ("quasi-adiabatisch") mit der Zeit, und der Gesamtkohlenstoff stellt eine Erhaltungsgröße des Systems dar. Somit läßt sich die Variable $C(t)$ in der Differentialgleichung durch Einsetzen von Gl. 5.2 eliminieren, womit die Anzahl der Gleichungen um eins verringert wird:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \frac{1}{k} [\Psi(N) - \sigma\phi(A - N)T^4] \\ \frac{dN}{dt} &= P(A(t) - N, N, T) - mN, \end{aligned} \quad (5.3)$$

wobei

$$\Psi(N) = S(1 - \alpha(N)). \quad (5.4)$$

Das System (5.3)-(5.4) stellt das einfachste System für unseren hypothetischen Planeten dar. Im folgenden Teil werden die qualitativen Eigenschaften für die Produktivität P und den albedoabhängigen Term $\Psi(N)$ angegeben.

Produktivitätsfunktion $P(C, N, T)$.

Nach dem Liebig'schen Gesetz ergibt sich ein multiplikativer Ansatz für die Produktivitätsfunktion P :

$$P = P_{\max} \cdot g_T(T) \cdot g_C(C) \cdot g_N(N),$$

wobei $0 \leq g_T(T), g_C(C), g_N(N) \leq 1$ gilt. Die biologische Produktivität $g_T(T)$ als Funktion von T ist eine unimodulare Funktion (siehe auch Abb. 2.2), $g_C(C)$ ist eine monoton wachsende Funktion mit einem Sättigungswert in C in Übereinstimmung mit, z.B., Lüdeke et al. (1995).

Die Funktion $g_N(N)$ wächst monoton in N mit einer oberen Schranke von 1 für $N \rightarrow \infty$. Da $C = A - N$ gilt, läßt sich aus dem Produkt $g_C \cdot g_N$ die Variable C eliminieren und sich deshalb als Funktion $G_N(N)$ nur der Variablen N (siehe Abb. 5.1) schreiben. Die Funktion G_N , definiert auf dem Intervall $[0, A]$, ist eine unimodulare Funktion mit $G_N(0) = G_N(A) = 0$.

Die Funktionen $\Psi(N)$ und $\phi(A - N)$.

Die Funktion $\phi_C = \phi$ zur Parametrisierung des CO₂-Treibhauseffekts in Abhängigkeit von N ist in ihrer funktionalen Form in Abb. 5.2 dargestellt, Abb. 5.3 zeigt Funktion der Einstrahlung $\Psi(N) = S(1 - \alpha(N))$ in Abhängigkeit der Vegetation

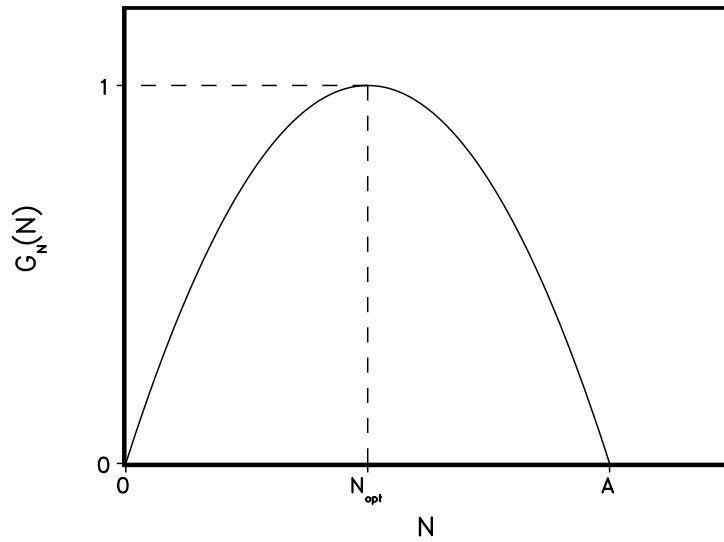


Abbildung 5.1: Die Wachstumsfunktion $G_N(N) = g_C(A - N) \cdot g_N(N)$ als Funktion von N .

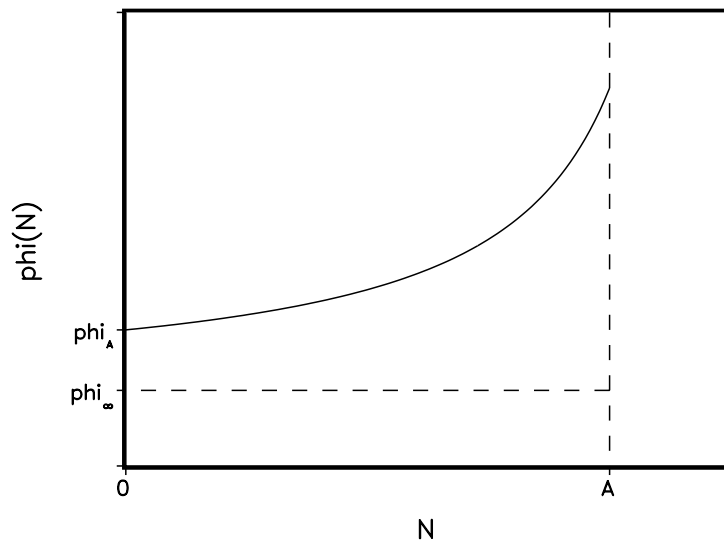


Abbildung 5.2: Funktion $\phi(C) = \phi(A - N)$ des CO_2 -Treibhauseffekts in Abhängigkeit von N . Der Wert $\phi(A) = \phi_A$ entspricht dem vegetationslosen Planeten mit $N = 0$, wird allein durch den Wert von A bestimmt.

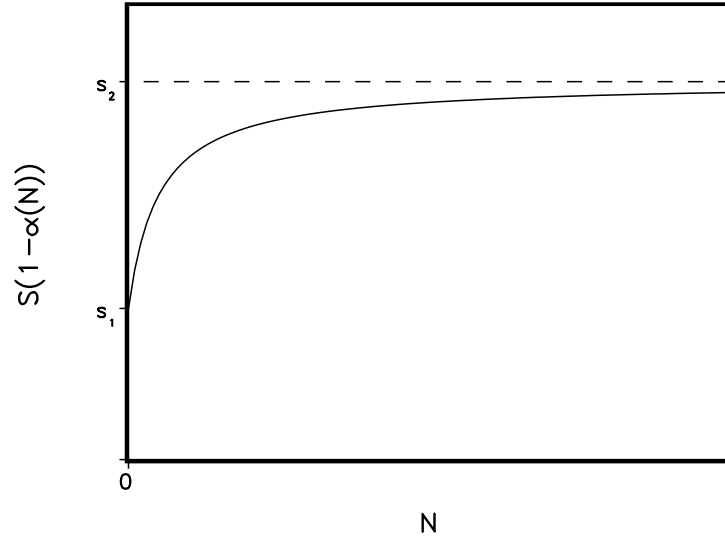


Abbildung 5.3: Qualitativer Verlauf der Funktion $\Psi(N) = S(1 - \alpha(N))$ in Abhängigkeit der Vegetation N : Untere bzw. obere Schranke sind durch $s_1 = S(1 - \alpha_1)$, $s_2 = S(1 - \alpha_2)$ gegeben.

N . Die untere und obere Schranke sind dabei durch die Albedo des vegetationslosen Planeten α_1 bzw. des vollständig vegetationsbedeckten Planeten α_2 gegeben.

Um die Gleichgewichtslösungen für die Klimavariablen T im folgenden Abschnitt bestimmen zu können, ist die Funktion $\Phi(N) = \Psi(N)/\varphi(N)$ nötig. Offensichtlich gilt für den Grenzfall des vegetationslosen Planeten $\Phi(0) = s_1/\varphi_A$, wobei $s_1 = S(1 - \alpha_1)$. Befindet sich sämtlicher Kohlenstoff in der Vegetation ($N = A$), so ergibt sich der zweite Grenzfall $\Phi(A) = \Psi(A)$. Wenn die Bedingung $(\ln \Psi)'_N = (\ln \varphi)'_N$ an einem Punkt $N_{\text{crit}} \in [0, A]$ erfüllt ist, dann hat $\Phi(N)$ ein Maximum bei N_{crit} (siehe auch Abb. 5.4). Für $N_{\text{crit}} > A$ ist $\Phi(N)$ eine monoton steigende Funktion, für $N_{\text{crit}} < 0$ entsprechend eine monoton fallende.

5.2 Gleichgewichtslösungen

Die Gleichgewichtslösungen von (5.3) und (5.4) werden bestimmt über

$$T^* = \{\Psi(N^*)/\sigma\varphi(N^*)\}^{\frac{1}{4}} \quad (5.5)$$

und durch Lösungen der Gleichung:

$$g_T(T^*) \cdot G_N(N^*) = \frac{m}{P_{\text{max}}} N^*.$$

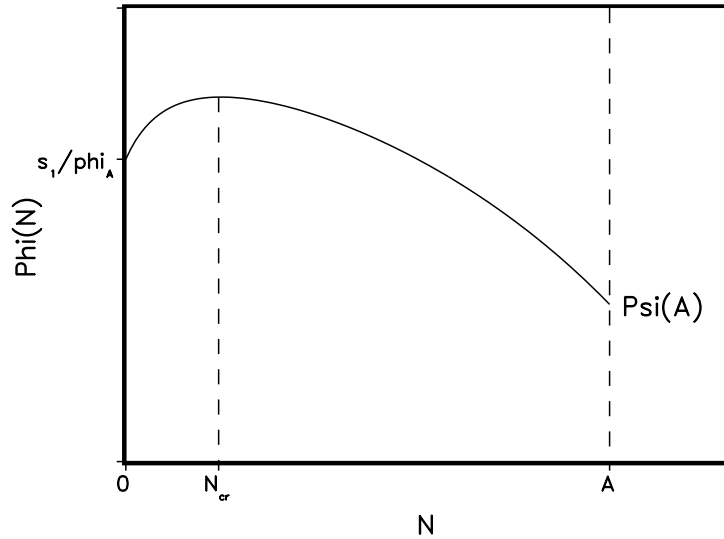


Abbildung 5.4: Qualitativer Verlauf der Funktion $\Phi(N)$; An der Stelle N_{cr} ist $\Phi' = 0$ bzw. $(\ln \Psi)'_N = (\ln \phi)'_N$.

Da $G_N(0) = 0$ gilt, läßt sich G_N auch in der multiplikativen Form: $G_N = f(N) \cdot N$ darstellen, wobei $\lim_{N \rightarrow 0} f(N) = f(0) < \infty$.

Die einfache Lösung

$$N^* = 0, \quad T^* = T_0 = \{\Psi(0)/\sigma\phi(0)\}^{\frac{1}{4}}$$

ist eine Gleichgewichtslösung des dynamischen Systems. Dieses Gleichgewicht mit $N^* = 0$ entspricht dem Zustand eines Planeten ohne jegliche Vegetation, in der sich sämtlicher Kohlenstoff in der Atmosphäre befindet.

Die restlichen Gleichgewichtslösungen lassen sich als Lösung der Gleichung 5.5 und von

$$g_T(T^*) = \frac{m}{P_{\max}} \cdot \frac{1}{f(N^*)}$$

bestimmen. Als notwendige Bedingung muß $T^* \in (T_{\min}, T_{\max})$ erfüllt sein.

Test auf Zyklen.

Durch Anwenden des Dulac-Kriteriums (siehe Seite 40) läßt sich zeigen, daß keine zyklische Lösungen des Systems (5.3)–(5.4) existieren. Da $f'(N) < 0$, ist der Ausdruck

$$D = \frac{\partial}{\partial T} \left\{ \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{k} [\Psi(N) - \sigma\phi(N)T^4] \right\} + \frac{\partial}{\partial N} \left\{ \frac{1}{N} [P_{\max}g_T(T)f(N)N - mN] \right\}$$

$$= -4\sigma T^3 \frac{\Phi(N)}{kN} + P_{\max} g_T(T) f'_N(N)$$

negativ für jedes T und N innerhalb des ersten Quadranten $N > 0, T > 0$, so daß das System (5.3)–(5.4) keine geschlossenen Trajektorien als Lösung haben kann. Somit endet jede Trajektorie in einem Fixpunkt. Mit der Bestimmung dieser Fixpunkte ist alles über das stationäre Verhalten des Systems bekannt.

Stabilitätsanalyse.

Linearisieren des Systems (5.3)–(5.4) in der Umgebung der Gleichgewichtspunkte liefert die Jacobi-Matrix:

$$J = \begin{pmatrix} -4\Psi(N^*)/kT^* & \left[\ln \frac{\Psi(N^*)}{\Phi(N^*)} \right]'_N \frac{\Psi(N^*)}{k} \\ P_{\max} N^* f(N^*) g'_T(T^*) & P_{\max} g_T(T^*) \{ f(N^*) + N^* f'(N^*) \} - m \end{pmatrix}.$$

Zuerst wird der Gleichgewichtspunkt $\{N^* = 0; T_0^*\}$ des unbelebten Planeten analysiert. Dann bestimmt sich die Jacobi-Matrix J_0 zu

$$J_0 = \begin{pmatrix} -4\Psi(N^*)/kT^* & \left[\ln \frac{\Psi(0)}{\Phi(0)} \right]'_N \frac{\Psi(0)}{k} \\ 0 & -m \end{pmatrix},$$

deren Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ sich zu

$$\lambda_1 = -4\Psi(0)/kT^* > 0; \lambda_2 = P_{\max} g_T(T^*) f(0) - m$$

ergeben. D.h. dieses Gleichgewicht ist ein stabiler Knoten, falls

$$g_T(T_0^*) < \frac{m}{P_{\max} f(0)} \quad (5.6)$$

und ist ein instabiler Sattelpunkt, falls

$$g_T(T_0^*) > \frac{m}{P_{\max} f(0)}. \quad (5.7)$$

Da $g_T(T) \equiv 0$ für alle $T \notin (T_{\min}, T_{\max})$, gilt $\lambda_2 = -m$, und jedes Gleichgewicht $\{N^* = 0, T_0^* \notin (T_{\min}, T_{\max})\}$ ist stabil.

Für $N^* \neq 0$ ergibt sich für die Jacobi-Matrix

$$J = \begin{pmatrix} -4\Psi(N^*)/kT^* & \frac{\Psi}{k} \left\{ \ln \frac{\Psi(N^*)}{\Phi(N^*)} \right\}' \\ mN^* \{ \ln g_T(T^*) \}' & mN^* \{ \ln f(N^*) \}' \end{pmatrix},$$

deren Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ - \left(\frac{4\Psi}{kT} - mN(\ln f)' \right) \pm \sqrt{\left[\frac{4\Psi}{kT} + mN(\ln f)' \right]^2 + \frac{4\Psi mN}{k} (\ln g_T)' \left(\ln \frac{\Psi}{\phi} \right)'} \right\}$$

sind. Da die Bedingung $(\ln f)' < 0$ für alle $N \leq A$ gilt, ist $\frac{4\Psi}{kT} - mN(\ln f)' > 0$, und damit kann das Gleichgewicht mit $N^* \neq 0$ nicht instabil sein.

Dieses Gleichgewicht ist aber ein Sattelpunkt unter der Bedingung, daß

$$F(N^*, T^*) = \left(\ln \frac{\Psi}{\phi} \right)'_{N^*} (\ln g_T)'_{T^*} + 4(\ln f)'_{N^*} (\ln T)'_{N^*} > 0.$$

Ist $F(N^*, T^*) < 0$, dann liegt ein stabiler Knoten oder ein stabiler Fokus vor. Für den Fokus müssen die Eigenwerte komplex sein; dies ist der Fall bei

$$\left[\frac{4\Psi}{kT} + mN(\ln f)'_N \right]_{T^*, N^*}^2 + \left[\frac{4\Psi mN}{k} (\ln g_T)'_T \left(\ln \frac{\Psi}{\phi} \right)' \right]_{T^*, N^*} < 0.$$

5.3 Parametrisierung

Eine Parametrisierung der Funktionen $\Psi(N)$, $\phi(N)$ und $f(N)$ vereinfacht die Analyse, ohne die Lösungsvielfalt einzuschränken:

1. Sei

$$\phi(C) = 1 - \frac{(1 - \phi_\infty)C}{k_c + C}.$$

Substitution von C durch $C = A - N$ liefert (siehe Abb. 5.2)

$$\phi(N) = \frac{k_c + \phi_\infty(A - N)}{k_c + A - N}. \quad (5.8)$$

$\Psi(N)$ (siehe Abb. 5.3) wird hinreichend gut von der Funktion

$$\Psi(N) = s_1 + \frac{(s_2 - s_1)N}{k_\alpha + N} = \frac{s_1 k_\alpha + s_2 N}{k_\alpha + N}$$

approximiert. Mit dieser Approximation ergibt sich für

$$\Phi(N) = \Psi(N)/\phi(N) = \frac{(s_1 k_\alpha + s_2 N)(\chi - N)}{(k_\alpha + N)(k_c + \phi_\infty A - \phi_\infty N)},$$

mit $\chi = k_c + A$, oder

$$\Phi(N) = \frac{s_2}{\phi_\infty} \cdot \frac{(a_1 + N)(\chi - N)}{(k_\alpha + N)(\chi_1 - N)},$$

mit $a_1 = s_1 k_\alpha / s_2$, $\chi = k_c + A$ und $\chi_1 = \frac{k_c}{\phi_\infty} + A$. Offensichtlich gilt $\chi_1 > \chi > A$ und $a_1 < k_\alpha$.

2. Sei

$$g_T(T) = \begin{cases} \frac{4}{\Delta T^2}(T - T_{\min})(T_{\max} - T) & , \text{für } T \in [T_{\min}, T_{\max}] \\ 0 & , \text{für } T \notin [T_{\min}, T_{\max}] \end{cases},$$

wobei $[T_{\min}, T_{\max}]$ das Vegetationstoleranzintervall darstellt, und $\Delta T = T_{\max} - T_{\min}$ dessen Länge. Die optimale Wachstumstemperatur T_{opt} bestimmt sich dann zu $T_{\text{opt}} = (T_{\min} + T_{\max})/2$ mit $g_T(T_{\text{opt}}) = 1$.

3. Die Parametrisierung von $f(N)$ geschieht über G_N , da $f(N) = G_N/N$. Weil die Funktion aufgrund der Unimodularität $G_N(N)$ als Parabel beschrieben werden kann, $G_N = \frac{4}{A^2}N(A - N)$, ergibt sich hieraus für $f(N)$:

$$f(N) = \frac{4(A - N)}{A^2}.$$

Die Parametrisierung erlaubt nun im folgenden Abschnitt eine weitergehende Analyse des Systems bei Erhöhung des Bifurkationsparameters A .

Verhalten von $\Phi(N, A)$ als Funktion des Gesamtkohlenstoffs A .

Da $N \leq A$ gilt, ergibt sich für $A \rightarrow 0$:

$$\Phi(A = 0) = s_1.$$

Die Bestimmung des Maximums $\Phi(N_{\text{crit}})$ von Φ wird über die Nullstelle der Ableitung Φ'_N ermittelt:

$$\Phi'_N = \Phi \left\{ \left(\frac{1}{a_1 + N} - \frac{1}{\chi - N} \right) - \left(\frac{1}{k_\alpha + N} - \frac{1}{\chi_1 - N} \right) \right\}.$$

Somit bestimmt sich N_{crit} über die Gleichung:

$$\frac{1}{a_1 + N} + \frac{1}{\chi_1 - N} = \frac{1}{k_\alpha + N} + \frac{1}{\chi - N}.$$

Für große A läßt sich leicht zeigen, daß die Lösung N_{crit} innerhalb des Intervalls $(0, A)$ liegt.

Für die erste Ableitung gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial A} &= \frac{s_2}{\varphi_\infty} \cdot \frac{a_1 + N}{k_\alpha + N} \cdot \frac{k_c(1 - \varphi_\infty)}{\varphi_\infty(\chi_1 A + \frac{K_c}{\varphi_\infty} - N)^2} \\ &= \Phi \cdot \frac{k_c(1 - \varphi_\infty)}{\varphi_\infty} \cdot \frac{1}{(\chi - N)(\chi_1 - N)} > 0, \end{aligned}$$

und für die zweite Ableitung: $\partial^2 \Phi / \partial A^2 < 0$. Da

$$T^* = \left\{ \frac{1}{\sigma} \Phi(N^*) \right\}^{\frac{1}{4}},$$

ist $T^*(A)$ eine monoton wachsende Funktion von A für alle N^* .

Verhalten von $g_T = \frac{m}{P_{\max}} \cdot \frac{1}{f(N)}$ als Funktion von A

Für $T \in [T_{\min}, T_{\max}]$ gilt

$$\begin{aligned} g_T &= \frac{m}{P_{\max}} \cdot \frac{A^2}{4(A-N)} \quad \text{oder} \\ N &= A \left\{ 1 - \frac{mA}{4P_{\max}} \cdot \frac{1}{g_T(T)} \right\}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

mit $g_T = \frac{4}{\Delta T^2} (T - T_{\min})(T_{\max} - T)$. Da N nur Werte innerhalb des Intervalls $[0, A]$ annehmen kann, muß der Klammerausdruck in (5.9) kleiner 1 sein und somit

$$g_T > \frac{m}{4P_{\max}} A, \quad (5.10)$$

d.h. die Bedingung $N^* > 0$ ist nur innerhalb des Intervalls $(T'_{\min}, T'_{\max})$ gültig, für das die Bedingung $g_T(T'_{\min}) = g_T(T'_{\max}) = \frac{m}{4P_{\max}} A$ gilt.

Dieses Intervall reduziert sich auf einen Punkt, d.h. $T'_{\min} = T'_{\max}$, unter der Bedingung, daß $\beta A_{\text{crit}} = 1$, wobei β definiert ist als

$$\beta := \frac{m}{4P_{\max}}.$$

Ist nun $A_{\text{crit}} > 1/\beta$, so kann keine Lösung mit $N^* > 0$ existieren. Somit bleibt als einzige Lösung mit $N^* = 0$ und T^* übrig. In Abb. 5.5 sind die verschiedenen $N(T)$ für jeweils verschiedene A gezeigt. Das Maximum von N bezüglich T ist $N_m(A) = \max_T N = A(1 - \beta A)$. Dessen Wert wird maximal bei $\max_A N_m = \frac{1}{4\beta}$ an der Stelle $A^* = \frac{1}{2\beta} = \frac{1}{2} A_{\text{crit}}$.

Betrachtet wird nun die Stabilitätsbedingung für $\{N^* = 0; T_0^*\}$ (Gleichungen 5.6–5.7). Da $f(0) = \frac{4}{A}$, folgt aus (5.6): Gilt

$$g_T < \frac{m}{4P_{\max}} A,$$

ist dieses Gleichgewicht stabil, und für

$$g_T > \frac{m}{4P_{\max}} A,$$

ist es instabil.

Der Vergleich mit (5.10) liefert die Bedingung für die Temperatur: Falls $T_0^* \in [T'_{\min}, T'_{\max}]$, dann ist der Fixpunkt mit $N^* = 0$ stabil, während er für $T^* \notin (T'_{\min}, T'_{\max})$ instabil wird. Für alle $A > A_{\text{crit}}$ existiert nur das Gleichgewicht $\{N^* = 0, T_0^*\}$ und ist stabil.

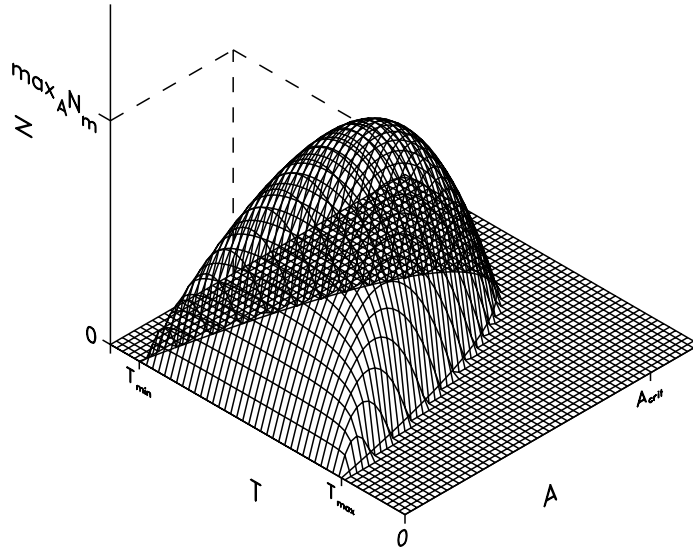


Abbildung 5.5: Mögliche Gleichgewichtslösungen für den Kohlenstoff in der Vegetation N als Funktion der Temperatur T und des Gesamtkohlenstoffs A . Für $A > A_{\text{crit}}$ existiert nur die Lösung des vegetationslosen Planeten.

Der vegetationslose Planet

Falls $T^* \notin (T_{\min}, T_{\max})$, d.h. die Gleichgewichtstemperatur außerhalb des Toleranzintervalls der Photosynthese liegt, ist dieses Gleichgewicht immer stabil. Ist nun $T_0^* \in (T_{\min}, T_{\max})$, so ist dieses Gleichgewicht nur stabil unter der Bedingung, daß

$$g_T(T_0^*) < \frac{m}{P_{\max} f(0)} = \frac{m}{4P_{\max}} A$$

bzw.

$$g_T \left\{ \sqrt[4]{\frac{1}{\sigma} \Phi(0)} \right\} < \frac{m}{4P_{\max}} A.$$

Unter der Annahme, daß die Umkehrfunktion g^{-1} existiert, gilt

$$\sqrt[4]{\frac{\Phi(0)}{\sigma}} < g^{-1} \left\{ \frac{m}{4P_{\max}} A \right\}. \quad (5.11)$$

Weil

$$\Phi(0) = \frac{S(1 - \alpha_1)}{\phi_A}$$

gilt, ist der linke Teil der Gleichung 5.11 nur abhängig von der Temperatur und der Gesamtmenge an Kohlenstoff, während der rechte Teil nur von der Charakteristik der Biosphäre und ebenfalls dem Gesamtkohlenstoff abhängt. Bei fixierter

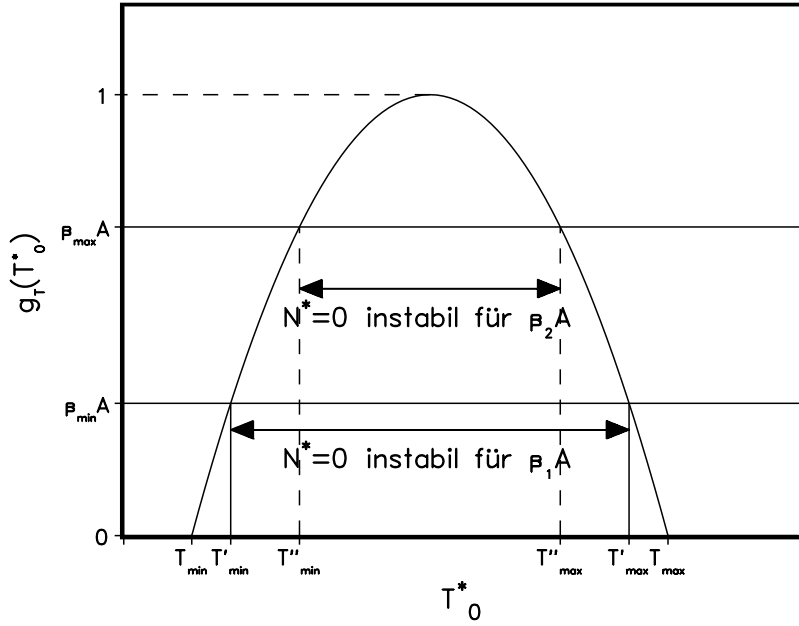


Abbildung 5.6: Stabilität des vegetationslosen Planeten: Im Intervall $[T'_{\min}, T'_{\max}]$ mit $g_T < \beta_1 A$ ist er instabil ($[T''_{\min}, T''_{\max}]$ für $\beta_2 A$). Bei $\beta A \equiv 1$ reduziert sich das Intervall zu einem Punkt, für Werte größer 1 ist er stabil für alle T .

Gleichgewichtstemperatur und Gesamtkohlenstoff des vegetationslosen Planeten kann durch Ändern der Vegetationseigenschaften (z.B. auf evolutionärem Weg) der zuerst stabile vegetationslose Zustand des Planeten instabil werden. Jede ε -Störung des unbelebten Planeten führt dann zum Auftreten von einer stabilen Vegetation.

Betrachtet man Abb. 5.6 genauer, so stellt man fest, daß die Bedingung $T_0^* \in [T_{\min}, T_{\max}]$, bei der die Gleichgewichtstemperatur zum Toleranzintervall der Photosynthese gehört, kein hinreichendes Kriterium für die Instabilität des vegetationslosen Planeten ist. Dieser wird dann erst instabil, wenn die Temperatur in einem Fenster $T_0^* \in (T'_{\min}, T'_{\max})$ liegt. Dieses Intervall hängt jeweils von biologischen Eigenschaften, wie der Verweildauer von Kohlenstoff in der Biosphäre ($\tau = 1/m$) und der maximalen Produktivität $P_{\max}$ ab. Das Intervall $(T'_{\min}, T'_{\max}) \subset [T_{\min}, T_{\max}]$ kann als "Vegetationstoleranzintervall" bezeichnet werden.

Ein Anwachsen des Parameters B durch einer Verringerung der "Verweildauer" von Kohlenstoff in der Biosphäre oder der maximalen Produktivität, führt zu einer Reduzierung eines solchen Vegetationstoleranzintervalls.

Unter der Bedingung $B = \beta A > \max_T g_T = 1$ ist der vegetationslose Planet stabil für jede Wahl von T_0^* , und es ist unmöglich, daß "Leben" in der Umgebung diese Gleichgewichts entstehen kann. D.h. es gibt eine kritische Kombination der

Parameter $P_{\max}$, m (oder τ) und A :

$$\frac{mA}{4P_{\max}} < 1$$

oder

$$A < 4P_{\max}\tau.$$

Hingegen ist

$$T_0^* = \left\{ \sqrt[4]{\frac{\Phi(0,A)}{\sigma}} \right\} = \left\{ \sqrt[4]{\frac{S(1-\alpha_1)}{\sigma\varphi_A}} \right\}$$

eine monoton steigende Funktion in A , da φ_A monoton fällt bei wachsendem A . Da $\varphi_A \rightarrow \varphi_\infty = \text{const}$, ist $T_0^*(A) \rightarrow (T_0^*)_{\max} = \text{const}$, falls $A \rightarrow \infty$.

Es lassen sich also zwei Bifurkationsparameter identifizieren: β und A . Für die Gleichgewichtstemperatur gilt $T_0^*(A) \rightarrow (T_0^*)_{\min}$, wenn $A \rightarrow 0$ mit

$$(T_0^*)_{\min} = \sqrt[4]{S(1-\alpha_1)/\sigma},$$

da $\varphi(A=0) = 1$.

Unter der Annahme $(T_0^*)_{\min} < T_{\min}$ und $(T_0^*)_{\max} > T_{\max}$ ergibt sich ein Stabilitätsdiagramm nach Abb. 5.7. Nur innerhalb der schraffierten Fläche kann sich Vegetation aus dem Zustand des unbelebten Planeten entwickeln. Die Grenze des Stabilitätsbereichs berechnet sich nach

$$\beta_{\text{crit}} = \frac{g_T(T_0^*(A))}{A} = \frac{g_T((T_0^*)_{\min}/\sqrt[4]{\varphi_A})}{A},$$

so daß für alle $\beta < \beta_{\text{crit}}$ der vegetationslose Planet instabil wird.

5.4 Numerische Analyse

Die numerischen Simulationen wurden für verschiedenen Gesamtkohlenstoffgehalt A des Klima-Vegetationssystems wiederholt. Abb. 5.8a-c zeigt Phasenportraits des Systems. Fixpunkte lassen sich dabei leicht aus den Schnittpunkten der beiden Kurven I: $T^* = \{\Phi(N^*/\sigma)\}^{\frac{1}{4}}$ und II: $N^* = A(1 - \beta A/g_T(T^*))$ bestimmen. Die Anzahl der Fixpunkte ist dabei auf 5 beschränkt, da beide Funktionen I und II unimodulare Funktionen sind und sich somit in maximal 4 Punkten schneiden können. Zusammen mit dem unbelebten Planeten als weiterem Fixpunkt kommt man dann auf 5 als obere Schranke. Bei einem bestimmten Satz von Parametern haben wir dann ein Phasenportrait wie in Abb. 5.8a: Zwei von drei möglichen Fixpunkten sind stabil, die "Kältewüste" mit $N = 0$ und der Planet mit $N > 0$.

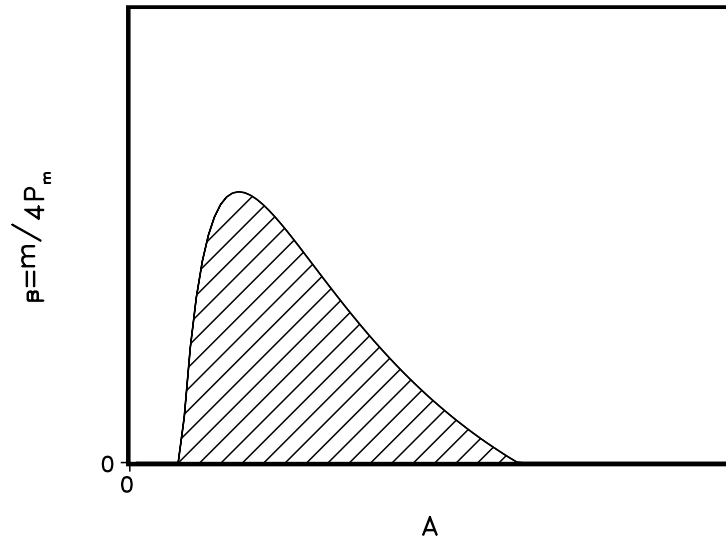


Abbildung 5.7: Stabilitätsgrenze: $g_T(T_0^*) = \beta A$, $T_0^* = T_0^*(A)$. Der schraffierte Bereich markiert den Parameterbereich mit einem instabilen vegetationslosen Planeten, in dem sich aus dem toten Planeten heraus Vegetation entwickeln kann.

Der Sattelpunkt trennt die beiden Attraktionsgebiete. Bei einer Erhöhung von A und fixiertem T_0 ändert sich das Phasenportrait qualitativ (Abb. 5.8b); es tauchen 3 stabile Lösungen auf. Eine weitere Erhöhung von A lässt die Zahl der stabilen Lösungen wieder auf zwei sinken (Abb. 5.8c).

Die Modellkomplexität lässt sich durch Einbeziehung eines Wasserkreislaufs erhöhen (Svirezhev und von Bloh, 1998). Das komplexere Modell zeigt in Abhängigkeit von den Modellparametern maximal 3 stabile Lösungen. Zusätzlich zum Gesamtkohlenstoff A des Systems kommt der Gesamtwassergehalt B als Bifurkationsparameter hinzu.

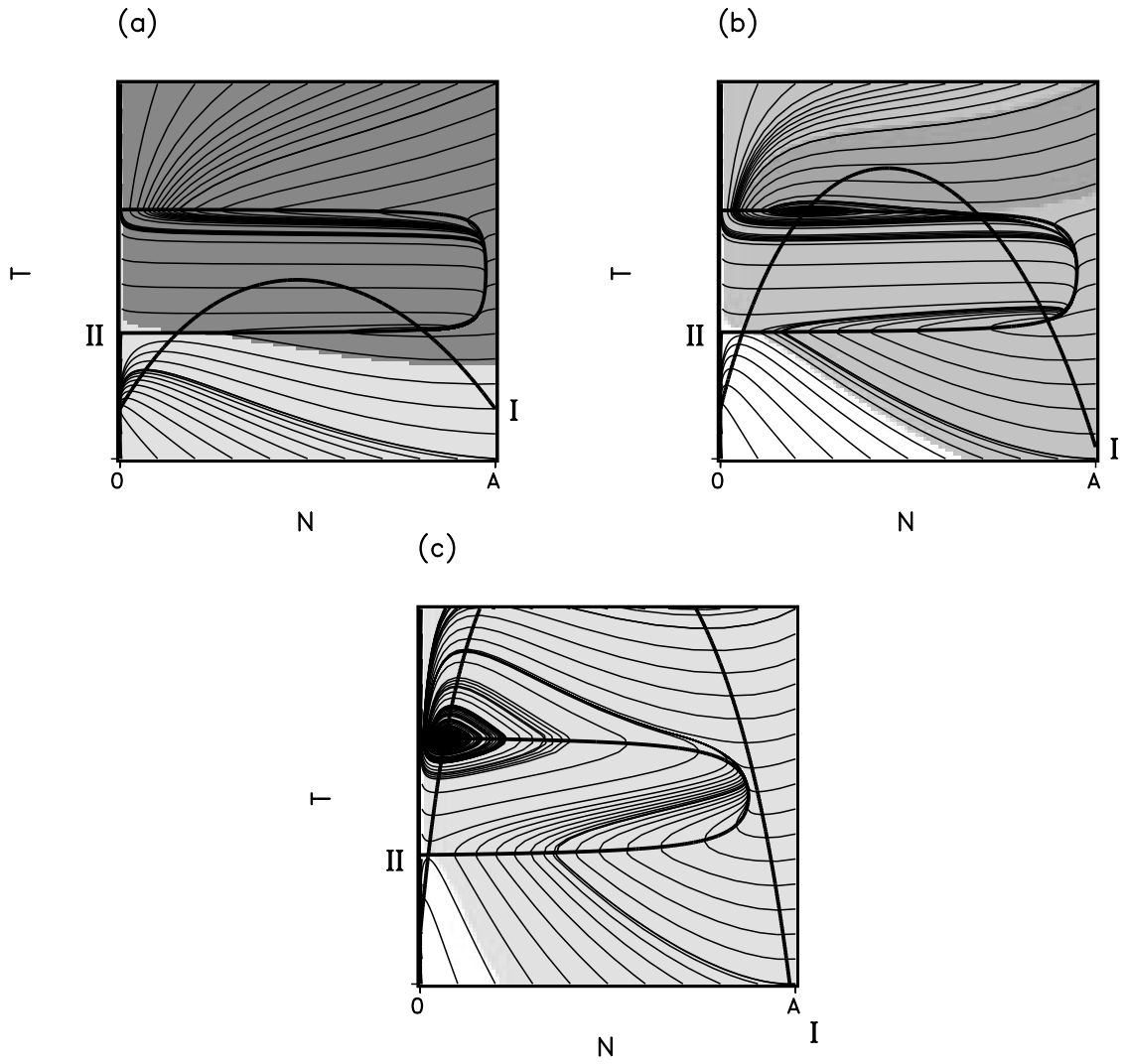


Abbildung 5.8: Phasenraumportraits im Vegetations-Temperaturraum $\{N, T\}$ für ansteigenden Gesamtkohlenstoff A . (a): "Kältewüste" und "kalter grüner Planet" sind stabile Fixpunkte, (b) "Kältewüste", "kalter" und "heißer grüner" Planet sind stabil, (c) "Kältewüste" und "heißer grüner" Planet sind stabil. Die unterschiedlich schraffierten Flächen geben die Attraktionsgebiete der jeweiligen Fixpunkte an.

Kapitel 6

Zweidimensionales Automatenmodell

6.1 Entwicklung des Modells

6.1.1 Temperaturverteilung

Nach der Analyse des Lovelock-Watson-Modells und Entwicklung von einfachen Klima-Biosphärenmodellen kommen wir zu dem im Abschnitt 3 besprochenen Modell zurück, welches aus einer diffusiven Kopplung des nulldimensionalen Modells entstanden ist. Eine Beschreibung des Modells läßt sich auch in von Bloh et al. (1997) finden. An jedem Raumpunkt sind neben der mittleren Temperatur $T(x)$ die für jede Art unterschiedlichen Temperaturen $T_i(x)$ definiert. Diese Größen sollen nun durch ein einziges, jetzt aber 2-dimensionales Temperaturfeld $T(x,y)$ ersetzt werden. Für die Temperaturbestimmung relevante Parameter sind dann die lokale Albedo $\alpha(x,y)$, Wärmekapazität κ , lateraler Wärmetransport D_T sowie Einstrahlung S .

Die Planetenoberfläche soll bezüglich der Parameter κ , D_T homogen sein. Wählt man eine ebenfalls homogenen Einstrahlung S der Sonne, so befindet sich der unbelebte Planet analog zum einfachen Modell nach

$$\sigma_B T_0^4 = S(1 - \alpha_0) \quad (6.1)$$

auf der Gleichgewichtstemperatur T_0 .

Die Temperaturverteilung wird allein aus der partiellen Differentialgleichung

$$\kappa \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t} = \underbrace{D_T \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) T(x,y,t)}_{\text{Diffusion}} - \underbrace{\sigma_B T(x,y,t)^4}_{\text{Abstrahlung}} + \underbrace{S(1 - \alpha(x,y,t))}_{\text{Einstrahlung}} \quad (6.2)$$

bestimmt. Die Kopplung mit dem Vegetationsmodell erfolgt über die Funktion der lokalen Albedo $\alpha(x,y)$.

6.1.2 Vegetationsdynamik

Die Bestimmung der lokalen Albedo $\alpha(x,y)$, die unmittelbar mit dem Wachstum der Pflanzen gekoppelt ist, blieb bis jetzt unberücksichtigt. Die Wachstumsfunktion $\beta(T)$ nach Gl. 2.6 jeder einzelnen Art soll unverändert bleiben, aber lokal von der Temperatur $T(x,y)$ abhängen.

Für die Beschreibung der Populationsdynamik des räumlichen Modells bietet sich das Konzept des zellulären Automaten (CA) (Wolfram, 1986; Goles, 1994) an. Dabei wird das Modell räumlich und zeitlich diskretisiert und das zeitliche Verhalten durch einen endlichen Satz von lokalen Regeln bestimmt. Zelluläre Automaten sind erfolgreich in der Lösung von Problemen in der Strömungsmechanik ("Lattice gas automata", siehe u.a. (Doolen, 1990)) oder auch zur Modellierung der Kalzitbildung in Sedimenten (Kropp et al., 1996) angewendet worden.

Die zweidimensionale Ebene wird durch ein kartesisches Gitter (x_i, y_j) mit $x_i = i \cdot \Delta x$ und $y_j = j \cdot \Delta y$, $i, j \in \mathbb{N}$ diskretisiert. Die Evolution in der Zeit vollzieht sich ebenfalls in diskreten Schritten $t_n = n \cdot \Delta t$ mit $n \in \mathbb{N}$. Jede Systemvariable F wird dann zu einer Funktion $F(x_i, y_j, t_n)$.

Zur Beschreibung der Populationsdynamik wird eine binärwertige Funktion $c(x_i, y_j, t_n) \in \mathbb{N}^3 \rightarrow \{0, 1\}$ definiert:

$$c(x_i, y_j, t_n) = \begin{cases} 1 & \text{falls Zelle mit Vegetation besetzt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Jede dieser mit Vegetation besetzten Zellen kann als Attribut die Albedo $\alpha(x_n, y_n, t_n)$ zugeordnet werden, deren Wert sich im allgemeinen von der Hintergrundalbedo α_0 unterscheidet. Dadurch kann jede der Zellen nur maximal von einer Pflanze besetzt werden.

Die zeitliche Entwicklung verläuft in diskreten Schritten $t_n = n\Delta t$ und wird durch folgende nichtdeterministische Regeln für alle Gitterzellen (x_i, y_j) bestimmt:

Regel 1: $c(x_i, y_j, t_n) = 1$, d.h. Zelle besetzt.

$$\Rightarrow \begin{aligned} c(x_i, y_j, t_{n+1}) &= \begin{cases} 1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - \gamma \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ \alpha(x_i, y_j, t_{n+1}) &= \begin{cases} \alpha(x_i, y_j, t_n) & \text{falls } c(x_i, y_j, t_{n+1}) = 1 \\ \alpha_0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Regel 2: $c(x_i, y_j, t_n) = 0$, d.h. Zelle unbesetzt. Wähle zufällig Nächstnachbarplatz (x_{NN}, y_{NN}) von (x_i, y_j) aus. Fallunterscheidung:

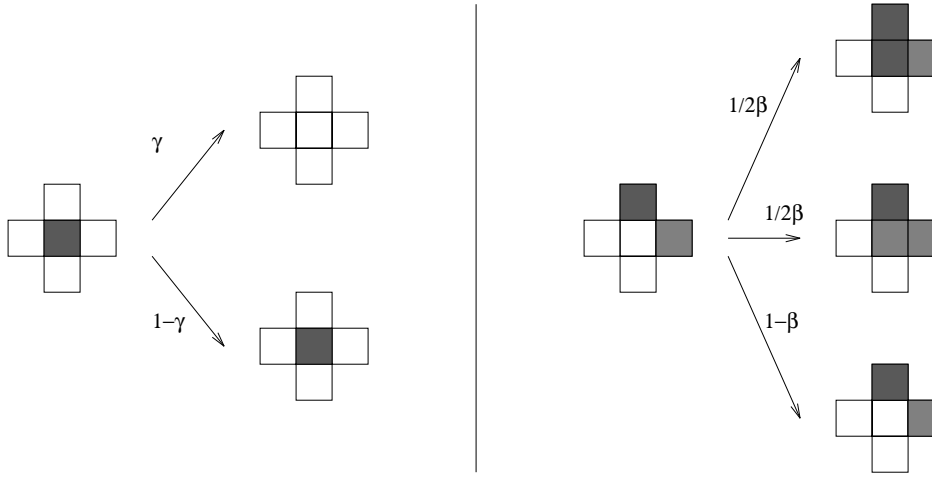


Abbildung 6.1: Wachstumsregeln für eine Gitterzelle. Deren Zustand zur Zeit t_{n+1} hängt nur von ihrem Zustand zur Zeit t_n und der ihrer Nächstnachbarzellen ab.

Regel 2.1: $c(x_{NN}, y_{NN}, t_n) = 0$

$$\Rightarrow c(x_i, y_j, t_{n+1}) = 0, \alpha(x_i, y_j, t_{n+1}) = \alpha_0$$

Regel 2.2: $c(x_{NN}, y_{NN}, t_n) = 1$

$$\Rightarrow \begin{aligned} c(x_i, y_j, t_{n+1}) &= \begin{cases} 1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } v \cdot \beta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ c(x_i, y_j, t_{n+1}) &= \begin{cases} f(\alpha(x_{NN}, y_{NN}, t_n)) & \text{falls } c(x_i, y_i, t_{n+1}) = 1 \\ \alpha_0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Regel 1 beschreibt das Sterben einer Pflanze mit der Wahrscheinlichkeit γ analog zum Ursprungsmodell. Regel 2 legt das Wachstumsverhalten fest. Da nur maximal eine Pflanze pro Zelle existieren kann, findet Wachstum nur auf unbesetzten Zellen und nur zwischen Nächstnachbarzellen statt. Eine graphische Darstellung der Wachstumsregeln zeigt Abb. 6.1.

Die Wachstumswahrscheinlichkeit β kann dabei einerseits so gewählt werden, daß sie von der Temperatur der zu bewachsenen Zelle abhängt (Version A)

$$\beta = \beta(x_i, y_j, t_n).$$

oder andererseits abhängig ist von der Temperatur der Nächstnachbarzelle (Version B)

$$\beta = \beta(x_{NN}, y_{NN}, t_n),$$

Die Funktion f in Regel 2.2 erlaubt Änderungen der Albedo im Wachstumsschritt. Setzt man f zu

$$f(\alpha) \equiv \alpha, \quad (6.3)$$

so bleibt die Albedo im Wachstumsschritt erhalten. Durch eine zufallsabhängige Änderung nach

$$f(\alpha) = \alpha + R; R \in [-r, r]; \langle R \rangle = 0; R \text{ zufallsverteilt,}$$

läßt sich eine ungerichtete Mutation ($\langle R \rangle = 0$) der Albedo modellieren mit r als der Mutationsrate.

Dabei hängt die Wachstumswahrscheinlichkeit nur von der lokalen Temperatur der Nächstnachbarzelle sowie von der Anzahl der bewachsenen Nächstnachbarzellen ab. Die Beschränkung auf Nächstachbarwachstum spiegelt die eingeschränkte Mobilität der Pflanzen wider.

Die partielle Differentialgleichung (6.2) für T wird durch ein finites, explizites Differenzenschema mit der gleichen Gittergröße N ersetzt:

$$\begin{aligned} T(x_i, y_j, t_{n+1}) = & T(x_i, y_j, t_n) + \frac{1}{\kappa} (S(1 - \alpha(x_i, y_j, t_n)) \\ & - \sigma_B T(x_i, y_j, t_n)^4 \\ & + D_T \left(\sum_{k,l=NN(i,j)} T(x_k, y_l, t_n) - 4T(x_i, y_j, t_n) \right)) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Aufgrund des expliziten Lösungsansatz darf κ bzw. D_T dabei nicht zu groß gewählt werden, um numerische Stabilität zu gewährleisten (Marsal, 1989). Ein implizites Verfahren, das für alle gewählten Zeitschritte Stabilität garantieren würde, läßt sich wegen der in Gl. 6.2 auftretenden Nichtlinearität nur bedingt einsetzen.

6.1.3 Rand- und Startbedingungen

Der Zustand jeder Zelle sowohl bez. Albedo und Temperatur hängt nur von den Nächstnachbarzellen ab. Beschränkt man sich auf endliche Gitter, müssen die Randbedingungen der Gitterzellen festgelegt werden. Es werden periodische Randbedingungen gewählt, für die gilt:

$$\begin{aligned} c(x_0, y_j, t_n) &= c(x_L, y_j, t_n) \\ c(x_{L+1}, y_j, t_n) &= c(x_1, y_j, t_n) \\ c(x_i, y_0, t_n) &= c(x_i, y_L, t_n) \\ c(x_i, y_{L+1}, t_n) &= c(x_i, y_1, t_n) \quad , \quad i, j = 1, \dots, L, \end{aligned} \quad (6.5)$$

wobei L die Gittergröße angibt. Entsprechendes gilt für das Temperatur- und Albedofeld. In jedem Zeitschritt muß sowohl die Temperatur- als auch die Albedoverteilung aktualisiert werden.

Die Anfangsverteilung $c(x_i, y_j, t_0)$, $\alpha(x_i, y_j, t_0)$ kann eine zufällige Besetzung der Zellen mit Pflanzen mit einer Zufallsverteilung der Albeden sein. Das Temperaturfeld wird entsprechend des gewählten Wertes von S auf die korrespondierende Temperatur $T_0(S)$ nach Gl. 6.1 gesetzt:

$$T(x_i, y_j, t_0) = T_0(S)$$

Wählt man f entsprechend Gl. 6.3, wird in diesem Modell jeder Pflanze eine Albedo zugeordnet, die beim Wachstum als Eigenschaft unverändert weitergegeben wird. Je nachdem, wie viele verschiedene Pflanzen als Startbedingung vorgegeben wurden, so viele Sorten existieren im Modell. Aufgrund nichtverschwindender Aussterbewahrscheinlichkeiten für einzelne Arten kann die Artenvielfalt nur eine monoton fallende Funktion der Zeit sein.

6.2 Vergleich mit dem ursprünglichen Lovelock-Watson-Modell

Um das Automatenmodell mit der Differentialgleichungsformulierung des ursprünglichen Lovelock-Watson-Modells vergleichen zu können, müssen die Besetzungswahrscheinlichkeiten $N(x, y, t)$ mit

$$N(x, y, t) := \langle c(x, y, t) \rangle,$$

wobei $\langle \cdot \rangle$ einer Ensemblemittelung entspricht, durch eine partielle Differentialgleichung genähert werden.

Im folgenden beschränken wir uns zuerst auf eine Vegetationsart ohne Mutation der Albedo ($f(\alpha) \equiv \alpha$). Die Wahrscheinlichkeit $N(x, y, t)$, daß eine Zelle von Vegetation bedeckt wird, bestimmt sich dann für Version A des Automaten zu:

$$\begin{aligned} N(x, y, t + \Delta t) = & (1 - \gamma)N(x, y, t) + \beta(T)(1 - N(x, y, t)) \frac{1}{4} \{ N(x + \Delta x, y, t) + \\ & + N(x - \Delta x, y, t) + N(x, y + \Delta y, t) + N(x, y - \Delta y, t) \}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Entwicklung von $N(x, y, t)$ in einer Taylorreihe in x, y bis zweiter Ordnung und t bis erster Ordnung liefert

$$N(x \pm \Delta x, y, t) = N(x, y, t) \pm \Delta x \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{1}{2} \Delta x^2 \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + O(\Delta x^3), \quad (6.7)$$

$$N(x, y \pm \Delta y, t) = N(x, y, t) \pm \Delta y \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{1}{2} \Delta y^2 \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} + O(\Delta y^3), \quad (6.8)$$

$$N(x, y, t + \Delta t) = N(x, y, t) + \Delta t \frac{\partial N}{\partial t} + O(\Delta t^2). \quad (6.9)$$

Einsetzen der Taylorreihen (6.7)–(6.9) in (6.6) liefert schließlich die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\gamma' N + \beta'(T)(1 - N) \left\{ N + D_x \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right\}.$$

mit $\gamma' = \gamma/\Delta t$, $\beta' = \beta/\Delta t$, $D_x = \frac{1}{2}\Delta x^2$ und $D_y = \frac{1}{2}\Delta y^2$.

Für Version B des Automaten ergibt sich analog:

$$\begin{aligned} N(x, y, t + \Delta t) = & (1 - \gamma)N(x, y, t) + (1 - N(x, y, t)) \frac{1}{4} \{ \\ & \beta(T(x + \Delta x, y, t))N(x + \Delta x, y, t) + \\ & + \beta(T(x - \Delta x, y, t))N(x - \Delta x, y, t) + \\ & + \beta(T(x, y + \Delta y, t))N(x, y + \Delta y, t) + \\ & + \beta(T(x, y - \Delta y, t))N(x, y - \Delta y, t) \} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Taylorentwicklung in Δx , Δy und Δt liefert als Ergebnis

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\gamma' N + (1 - N) \left\{ \beta' N + \left(D_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\beta' N) \right\}.$$

Für homogene Lösungen, d.h. $N(x, y, t) \equiv N(t)$, entsprechen die Gleichungen sowohl für Version A als auch Version B dem System mit einer Art (siehe Gl. 2.7).

Berücksichtigen wir für das homogene System ein kontinuierliches Artenspektrum mit Albedo $\alpha \in [0, 1]$ und Mutation, erhalten wir für $N(\alpha, t)$ folgende Gleichung:

$$N(\alpha, t + \Delta t) = (1 - N(\alpha, t))\gamma + \beta(T) \left(1 - \int_0^1 N(\alpha', t) d\alpha' \right) \frac{1}{2r} \int_{\alpha-r}^{\alpha+r} N(\alpha', t) d\alpha' \quad (6.11)$$

Taylorentwicklung in α ergibt folgenden Ausdruck für $N(\alpha + \Delta\alpha, t)$

$$N(\alpha + \Delta\alpha, t) = N(\alpha, t) + \Delta\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} N(\alpha, t) + \frac{1}{2} \Delta\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} N(\alpha, t) + O(\Delta\alpha^3). \quad (6.12)$$

Setzt man nun (6.12) in (6.11) ein, ergibt sich folgende Gleichung für kleine Mutationsraten r :

$$\frac{\partial}{\partial t} N(\alpha, t) = -\gamma' N(\alpha, t) + \beta'(T) \left(1 - \int_0^1 N(\alpha', t) d\alpha' \right) \left(N(\alpha, t) + \frac{1}{6} r^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} N(\alpha, t) \right) \quad (6.13)$$

Auch hier stimmt die Gleichung mit $r \equiv 0$ überein mit der Ausgangsgleichung des ursprünglichen Lovelock-Watson-Modells.

6.3 Numerische Lösung des Automatenmodells

6.3.1 Implementation auf Parallelrechner

Der Simulationsaufwand steigt bei dem hier vorgestellten Modell quadratisch mit der Gittergröße L an und erfordert bei größeren Gittern eine relativ hohe Rechenleistung. Statt nun Rechner mit immer schnelleren und entsprechend überproportional teureren Prozessoren zu verwenden, stellt die Verwendung von Parallelrechnern, bei dem auf mehreren Prozessoren geringerer Leistung verteilt das Problem bearbeitet wird, eine sinnvolle Alternative dar. Durch die in diesem Modell ausschließlich vorhandene Nächstnachbarkopplung sind die Voraussetzungen für eine effiziente Parallelisierung gegeben.

Parallelrechnerarchitekturen lassen sich dabei in 2 Klassen einteilen:

1. Zum einen handelt es sich um “shared Memory” Architekturen, bei der mehrere Prozessoren auf einen gemeinsamen globalen Speicher zugreifen. Die Verwendung dieser Architektur beschränkt die maximale Zahl der Prozessoren (typisch bis zu 32), weil sonst der konkurrierende Zugriff mehrerer Prozessoren auf den gemeinsamen Speicher zu Konflikten führt. Ihr großer Vorteil liegt in der einfachen Programmierbarkeit. Das Problem muß nur auf parallel verarbeitende “Threads” aufgeteilt werden, die alle auf einen gemeinsamen Speicher zugreifen können.
2. Ein alternatives Konzept stellt der “distributed Memory” Computer dar, bei dem die Prozessoren lokal über eigenen Speicher verfügen. Der notwendige Austausch von Daten erfolgt dann über ein zusätzliches Kommunikationsnetzwerk. Den wesentlichen Unterschied der beiden Architekturen verdeutlicht Abb. 6.2. Der Nachteil einer solchen Lösung liegt in dem signifikant langsameren Speicherzugriff auf Daten außerhalb des lokalen Speichers. Zudem liegt dieser Art von Parallelrechnern ein anderes Programmierparadigma zugrunde: das Message-passing Konzept. Dementsprechend aufwendig ist eine Anpassung der sequentiellen Programme auf solche Maschinen.

6.3.2 Parallelisierung des zellulären Automaten

Da der Zustand des CA zu einem Zeitschritt n von Zustand zum Zeitschritt $n - 1$ abhängt, läßt sich das Problem in zeitlicher Richtung nicht parallelisieren. Dafür verspricht die Parallelisierung in räumlicher Richtung weitaus größeren Erfolg, da hier die Abhängigkeit auf Nächstnachbarzellen beschränkt bleibt.

Ein weiteres Problem besteht in der Auswahl eines geeigneten Zufallszahlengenerators. Ein gängiger Zufallszahlengenerator (James, 1990) berechnet nach der

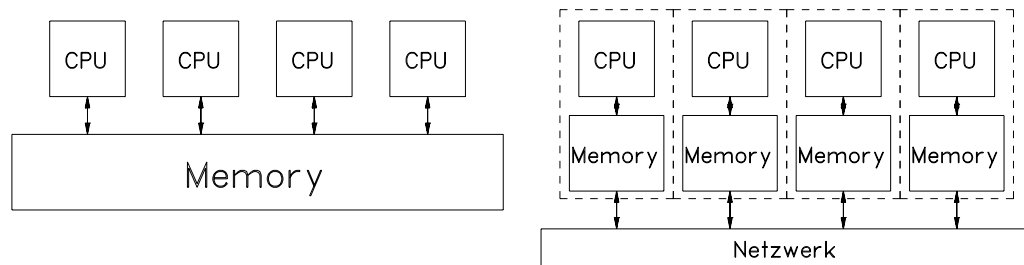


Abbildung 6.2: Shared Memory (linke Seite) versus distributed Memory Architektur (rechte Seite).

Iterationsvorschrift

$$s \leftarrow (a \times s) \bmod b$$

mit geeignet zu wählenden a , b eine im Intervall $[1, b - 1]$ gleichverteilte Zufallszahl. Aufgrund der direkten Abhängigkeit lässt sich der Algorithmus nicht parallelisieren. Eine Lösungsmöglichkeit besteht darin, mit lokal verschiedenen Anfangswerten des Zufallsgenerators auf jedem Prozessor zu starten. Von diesem Ansatz ist bei den Parallelalgorithmen Gebrauch gemacht worden.

Für die gewählte Aufgabenstellung bietet sich primär als Kommunikationsstruktur für ein distributed Memory System eine Gittertopologie an, in der jeder Prozessor durch 4 Kommunikationskanäle mit seinen Nachbarn verbunden ist (Abb. 6.3). Jeder Zeitschritt kann parallel auf jedem Prozessor mit dem lokalen Untergitter durchgeführt werden. Nach jedem dieser Zeitschritte ist aber eine Austausch der Randzellen der Gitter nötig.

6.3.3 Effizienzanalyse der Parallelisierung

Bei Verwendung von p Prozessoren steigert sich die Rechenleistung nicht unbedingt um den gleichen Faktor p . Bestimmte Teile eines Programms können nur sequentiell mit entsprechend geringerer Rechenleistung abgearbeitet werden, während andere Teile parallel auf sämtlichen Prozessoren mit entsprechend hoher aggregierter Rechenleistung ablaufen. Besteht ein solches Programm nun aus n Segmenten, die jeweils N_i Schritte mit einer Rechengeschwindigkeit von r_i Schritten pro Sek. ausführen, dann bestimmt sich die gesamte Rechenleistung für die

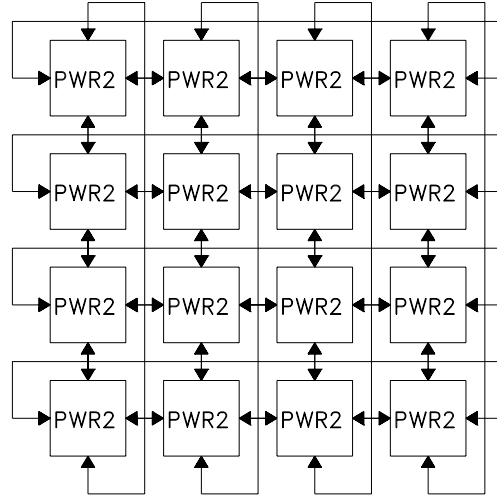


Abbildung 6.3: Gittertopologie mit $M = 16$ Prozessoren: Jeder Prozessor hat genau 4 Nachbarn.

$N = N_1 + \dots + N_n$ Schritte nach (“Amdahl’s law” (Almasi und Gottlieb, 1989)):

$$r = \frac{N}{\frac{N_1}{r_1} + \dots + \frac{N_n}{r_n}}$$

Unter der Voraussetzung, daß der Anteil f eines Programms parallel abläuft und der Anteil $1 - f$ nur sequentiell, ergibt sich für die Rechenzeitbeschleunigung (“Speedup”) S_p , definiert als

$$S_p := \frac{\text{Laufzeit für 1 Prozessor } t_1}{\text{Laufzeit für } p \text{ Prozessor } t_p},$$

für p Prozessoren:

$$S_p \stackrel{p}{=} f + (1 - f)p \quad \text{Ware's law}$$

Die Effizienz der Parallelisierung, definiert als

$$E_p := \frac{t_1}{pt_p} = \frac{1}{p} S_p$$

bestimmt sich dann zu

$$E_p = \frac{1}{f + (1 - f)p}$$

und geht für große p gegen 0.

Für den hier vorliegenden Algorithmus ergibt sich nun folgende Abschätzungen der Effizienz: Besteht der Parallelrechner aus p Prozessoren, so sind in jedem Prozessor L^2/p Gitterzellen vorhanden. Jedes dieser Teilgitter hat $4L/p$ Oberflächenpunkte, die mit den Nachbarprozessoren ausgetauscht werden müssen. Erfordert jede Gitterzelle c_1 Rechenoperationen und die Kommunikation einer Oberflächenzelle mit einem Nachbarn c_2 Rechenoperationen, so ergibt sich für die Effizienz E_p der Parallelisierung:

$$E_p = \frac{\frac{1}{p} * c_1 N^2}{c_1 \frac{L^2}{p} + c_2 \frac{4L}{\sqrt{p}}} = \frac{1}{1 + \frac{4c_2}{c_1} \frac{\sqrt{p}}{L}}$$

Für große Gitter L geht die Effizienz gegen den optimalen Wert 1 und gehört somit zur Klasse der effektiven parallelen Algorithmen.

Für die einfachere Ringtopologie ergibt sich für die Effizienz der Wert

$$E_p = \frac{\frac{1}{M} c_1 L^2}{c_1 \frac{L^2}{p} + c_2 L} = \frac{1}{1 + \frac{c_2}{c_1} \frac{p}{L}}, \quad (6.14)$$

der dem Ware's law entspricht, weil der Kommunikationsanteil für unterschiedliche p konstant bleibt.

Bei den dargestellten Abschätzungen blieben die notwendigen Ein-/Ausgabeoperationen unberücksichtigt. Da die Ausgabe normalerweise nicht in jedem Iterationsschritt erfolgt, haben sie für die Gesamtlaufzeit des Algorithmus nur eine untergeordnete Bedeutung.

Das in den vorigen Abschnitten entwickelte Modell wurde auf einem IBM-SP2 Parallelrechner implementiert. Die notwendigen Kommunikationen wurden mit dem Message-passing Paradigma unter Verwendung der standardisierten MPI-Bibliothek (Gropp et al., 1994) realisiert. Die dem Kommunikationsnetzwerk zugrunde liegende Netzwerkstruktur (High-Performance Switch) ist topologieunabhängig.

Die notwendige Verteilung der Gitter und Kommunikationsaufrufe wurden in eine parallele Library ausgelagert, so daß der vorliegende Code nur eine minimale Zahl von spezifischen Parallelaufufen enthält und so ohne wesentliche Änderungen auch auf einer sequentiellen Maschine eingesetzt werden kann.

Um die Abschätzung für die Effizienz der Parallelisierung des Automatenmodells zu verifizieren, wurden für eine gegebene Gittergröße $L = 200$ die Rechnungen bei ansonst identischen Parametern für verschiedene Prozessorzahlen p mit der Torustopologie durchgeführt. Nach Gl. 6.14 muß die Rechenzeit $T(p)$ für die Torustopologie in der Form

$$T(p) = c_1 \frac{1}{p} + c_2 \frac{1}{\sqrt{p}} \quad (6.15)$$

Prozessorzahl p	Rechenzeit $T(p)$ in Sek.
4	933.62
8	479.66
16	392.94
32	203.34
50	118.48

Tabelle 6.1: Rechenzeit in Abhängigkeit von der Prozessorzahl für Gittergröße $L = 200$ bei sonst gleicher Parameterwahl.

von p abhängen.

In Abb. 6.4 ist die Rechenzeit T nach Tab. 6.1 und Effizienz E gegenüber der Prozessorzahl p aufgetragen. Die Parameter der Kurve für die Effizienz wurde durch lineare Regression von $T(p)p$ gegenüber $\sqrt{p}$ ermittelt. Die gemessenen Werte werden sehr gut durch diese Kurve wiedergegeben, es bestätigt sich also die funktionale Form der Abhängigkeit von $T(p)$ laut Gl. 6.15.

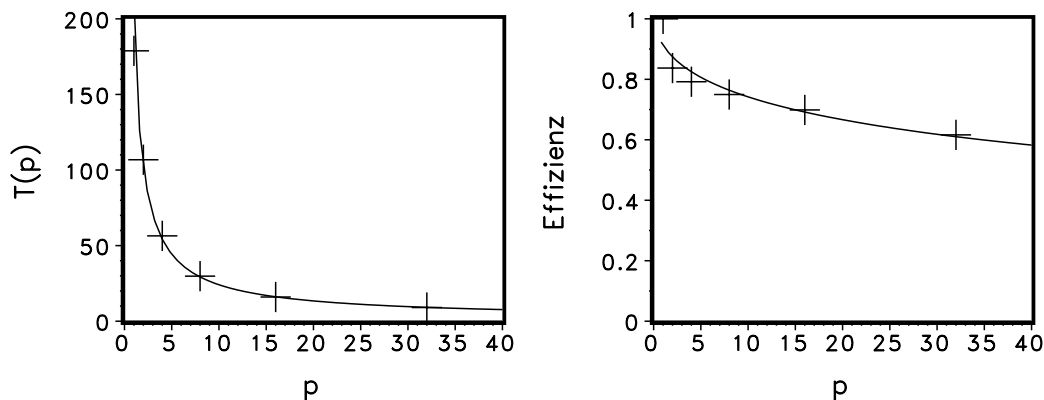


Abbildung 6.4: Gemessene Rechenzeit T in Abhängigkeit von der Prozessorzahl p für Torustopologie (linke Seite). Auf der rechten Seite ist die zugehörige Effizienz E dargestellt. Die durchgezogene Linie gibt Gl. 6.15 mit durch lineare Regression bestimmten c_1, c_2 wieder.

6.4 Analyse für konstante solare Einstrahlung

Die numerische Analyse wurden zunächst bei konstanter solarer Einstrahlung ohne Mutation und mit verschiedenen Mutationsraten r durchgeführt. Die Si-

Parameter	Wert
L	200
κ	2500
D_T	10
σ_B	$5.6696 \cdot 10^{-8}$
γ	0.02
Δt	1
Δx	1
Δy	1

Tabelle 6.2: In den Modellsimulationen gewählte Parameter für das Automatenmodell.

mulation erfolgt auf einem kartesischen 200×200 Gitter ($L = 200$) mit Torus-Geometrie, d.h. mit periodischen Randbedingungen für Version A des zellulären Automaten. Die Parameter wurden entsprechend Tab. 6.2 gewählt.

Dabei zeigt sich, daß die globale Mitteltemperatur definiert als

$$\bar{T} := \frac{1}{L^2} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L T(x_i, y_j)$$

sich nach $\approx 10^4$ Iterationen auf die optimale Wachstumstemperatur T_{opt} einstellt. Die Verteilung der Arten kann durch das Artenspektrum $B(\alpha)$ definiert als

$$B(\alpha)d\alpha := \text{Anzahl der Arten mit Albedo } \alpha' \in [\alpha + d\alpha]$$

quantifiziert werden. Die Durchschnittsalbedo $\bar{\alpha}$ und die Varianz σ^2 wird für das Artenspektrum dabei nach

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{n} \int_0^1 \alpha B(\alpha) d\alpha, \sigma^2 = \frac{1}{B} \int_0^1 \alpha^2 B(\alpha) d\alpha - \bar{\alpha}^2,$$

bestimmt. Die Varianz σ^2 kann dabei als Maß für die Biodiversität aufgefaßt werden.

Das Artenspektrum wurde für eine Reihe von Mutationsraten $r \in [0, 0.2]$ bestimmt. Betrachtet man dabei die Ergebnisse in Abb. 6.5, so lassen sich die Artenspektren für $r < 0.1$ durch gaussförmige Verteilungen beschreiben:

$$B(\alpha) \propto e^{(\alpha - \bar{\alpha})/2\sigma^2}.$$

Die Standardabweichung σ als Funktion der Mutationsrate r ist in Abb. 6.6 gra-

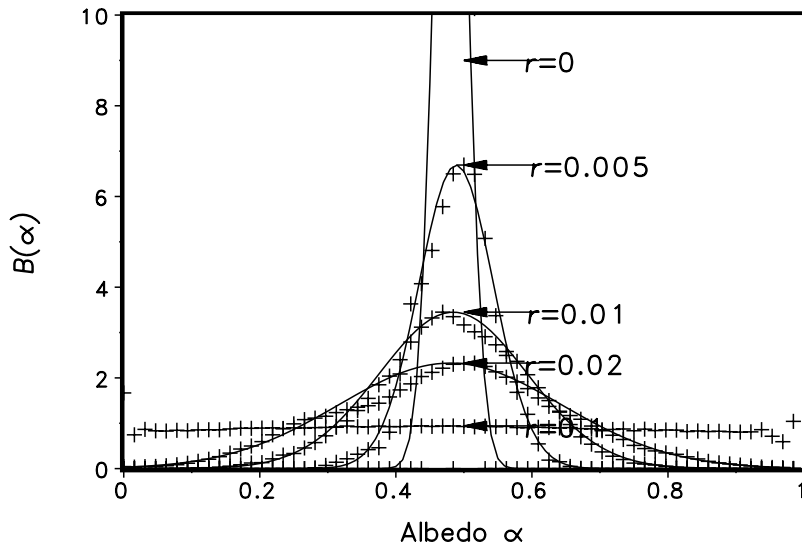


Abbildung 6.5: Artenspektren $B(\alpha)$ für Mutationsraten $r = 0, 0.005, 0.01, 0.1$ nach 10^6 Iterationen bei konstanter solarer Einstrahlung, $T_0(S) = T_{\text{opt}}$.

phisch dargestellt. Eine obere Schranke für σ ist dabei durch ein gleichverteiltes Spektrum mit

$$\sigma^2 = \int_0^1 \alpha^2 d\alpha - \bar{\alpha}^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

gegeben. Für $r = 0$ stellt sich ein δ -förmiges Spektrum ein, d.h. für $t_n \rightarrow \infty$ bleibt nur eine Art mit $\alpha = \alpha_{\text{opt}}$ übrig.

6.5 Analyse für linearen Anstieg der solaren Einstrahlung

Die analog zum ursprünglichen Modell interessantere Fragestellung ist das Verhalten bei Variation der solaren Einstrahlung S . S wird dabei in einem Zeitraum linear hochgefahren, der genügend groß gegenüber der im vorigen Abschnitt bestimmten Einschwingzeit des Systems ist.

Verhalten ohne Mutation

Die Simulation wurde zuerst ohne Mutation ($r = 0$) durchgeführt. Als Ergebnis der Simulation stellt sich für die mittlere Temperatur T ein ähnliches Verhalten wie bei dem einfachen Modell heraus; T bleibt für einen weiten Bereich von S

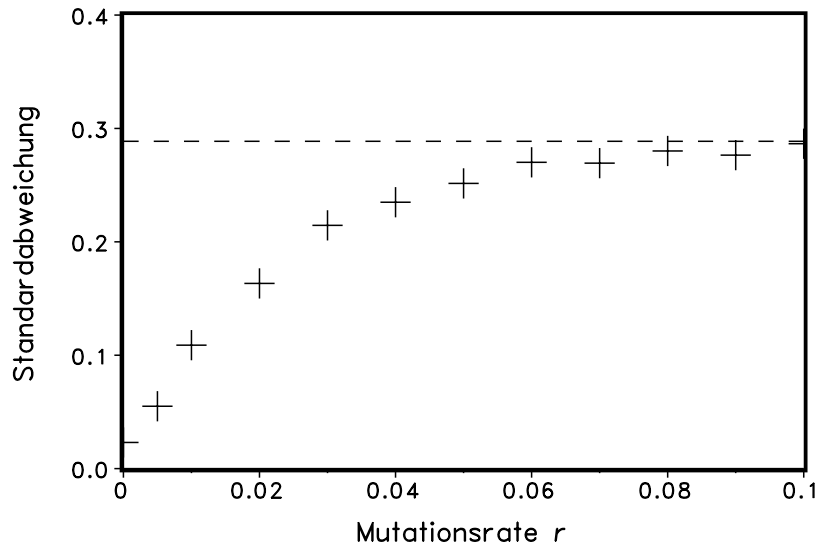


Abbildung 6.6: Standardabweichung σ für verschiedene Mutationsraten r . Die horizontale gestrichelte Linie gibt den Wert bei gleichverteiltem Spektrum ($B(\alpha) = \text{const}$) an.

nahezu konstant (siehe Abb. 6.7). Dabei wurde eine Zufallsverteilung von 2 Arten mit der Albedo $\alpha_1 = 0.25$ bzw. $\alpha_2 = 0.75$ als Anfangsbedingung gewählt, um ein Vergleich mit dem nulldimensionalen Modell zu gewinnen.

Gibt man die Beschränkung von 2 Arten auf, so ergibt sich bei sonst gleichen Parametern das in Abb. 6.8 gezeigte Verhalten bei Erhöhung von S . Für $S > S_{\text{crit}} = 1.47$ bei einer Anfangstemperatur $T_0 = 22.5^\circ\text{C}$ stirbt die Vegetation aus. Das Aussterben der Vegetation erfolgt bei einer deutlich niedrigeren solaren Einstrahlung (siehe Abb. 6.7 für 2 Arten). Eine Erklärung liefert die Analyse bei konstanter solarer Einstrahlung für $r = 0$: Da sich die Vegetation mit der optimalen Albedo gegenüber den anderen Arten durchsetzt, ist bei Erhöhung von S keine den neuen Bedingungen angepaßte Art verfügbar.

Verhalten mit Mutation

Bei $r = 0.05$ liefert eine Simulation bei konstanter Einstrahlung S ein deutlich besseres Regelverhalten als ohne Mutation. Die Temperatur wird über ein signifikant größeres Intervall ($S_{\text{crit}} = 2.41$) auf die optimale Wachstumstemperatur T_{opt} gehalten.

Der Bereich der solaren Einstrahlung, der noch von der Vegetation auf die optimale Wachstumstemperatur eingeregelt werden kann, wird von der Größe der Mutationsrate abhängen. Um den Einfluß der Mutationsrate auf das Regelintervall

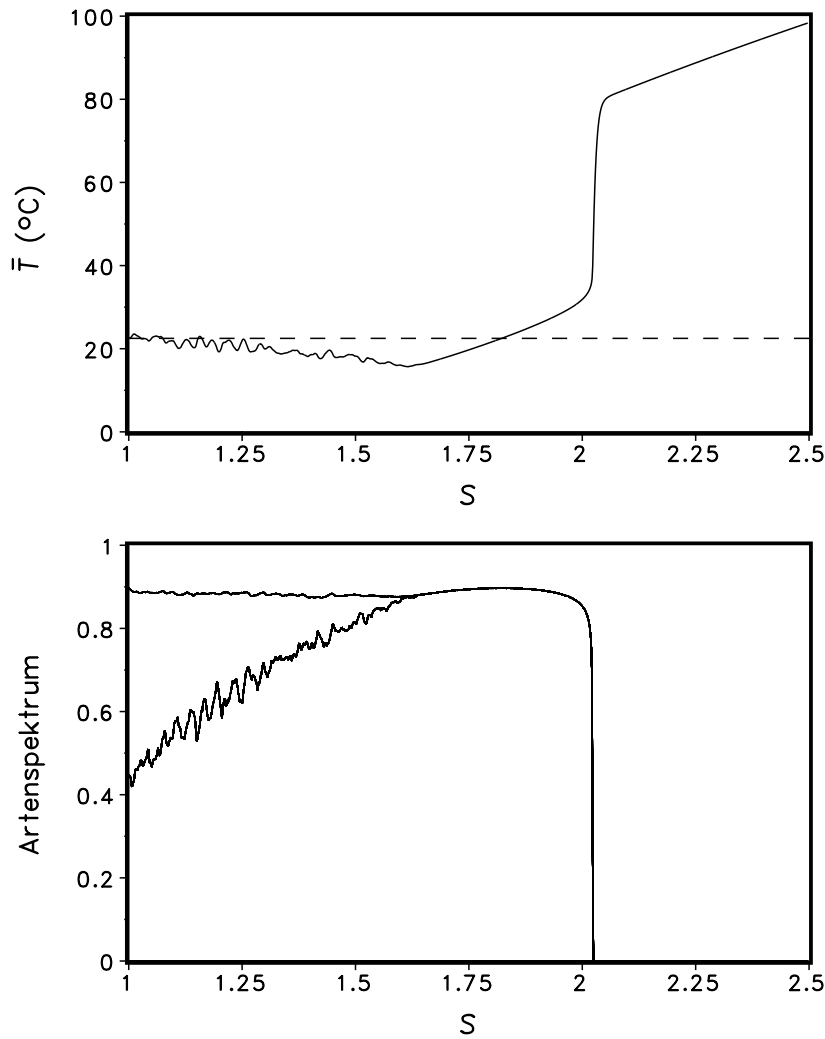


Abbildung 6.7: Oberes Bild: Mittlere Temperatur des Modells bei einer Anfangstemperatur von $T_0 = 22.5^\circ\text{C}$ bei linearer Erhöhung von S . Unteres Bild: Flächenanteil der beiden Arten, $\alpha_1 = 0.25$, $\alpha_2 = 0.75$.

quantitativ erfassen zu können, werden die Simulationen bei ansonst unveränderten Parametern für eine Schar von Mutationsraten r wiederholt und der Punkt bestimmt, an dem die Vegetation auf dem Planeten verschwindet.

Diese kritische Einstrahlung S_{crit} ist in Abb. 6.10 gegenüber der variierten Mutationsrate $r \in [0, 0.2]$ aufgetragen. Für $r \approx 0.06$ nimmt S_{crit} ein Maximum mit $S_{\text{max}} = 2.41$ an, während bei einer weiteren Erhöhung der Mutationsrate das Regelintervall wieder abnimmt.

Die kritische solare Einstrahlung bei fixierter Mutationsrate hängt sicherlich von dem Albedointervall $[\alpha_{\text{min}}, \alpha_{\text{max}}]$ ab, der für die Vegetation zulässig ist (siehe auch die Analyse für das Lovelock-Watson-Modell in Abschnitt 2.2.2). Die bisherigen Simulationen wurden mit den Werten $[\alpha_{\text{min}}, \alpha_{\text{max}}] \equiv [0, 1]$ durchgeführt.

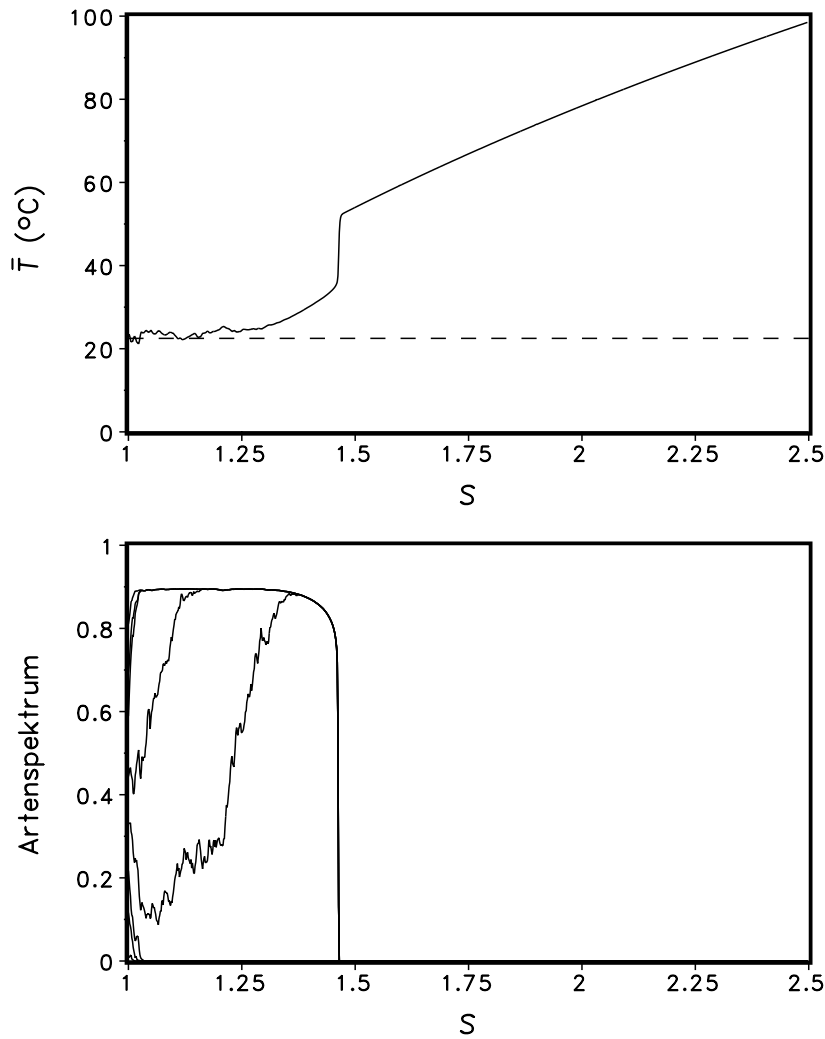


Abbildung 6.8: Oberes Bild: Mittlere Temperatur des Modells bei einer Anfangstemperatur von $T_0 = 22.5^\circ\text{C}$ bei linearer Erhöhung von S ohne Albedomutation. Als Startbedingung wurde ein gleichverteiltes Artenspektrum mit $\alpha \in [0, 1]$ vorgegeben. Anzahl der Iterationen: 10^6 . Unteres Bild: Kumulatives Artenspektrum.

Verringert man nun das Intervall symmetrisch um den Faktor a mit

$$[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}] = [a, 1 - a],$$

so ergibt sich für die kritische solare Einstrahlung eine monoton fallende Funktion (Abb. 6.11). Bis $a \approx 0.15$ bleibt das Regelverhalten unbeeinflusst, um dann kontinuierlich schlechter zu werden. Für $a > 0.4$ ist keine Selbstregulation mehr festzustellen, da der Zusammenbruch der Vegetation mit Erreichen von $T_{\max} = 40^\circ\text{C}$ des vegetationslosen Planeten zusammenfällt.

Vergleich der beiden Automatenregeln.

Für die beiden Automatenregeln A und B ergibt sich gegenüber Erhöhung der

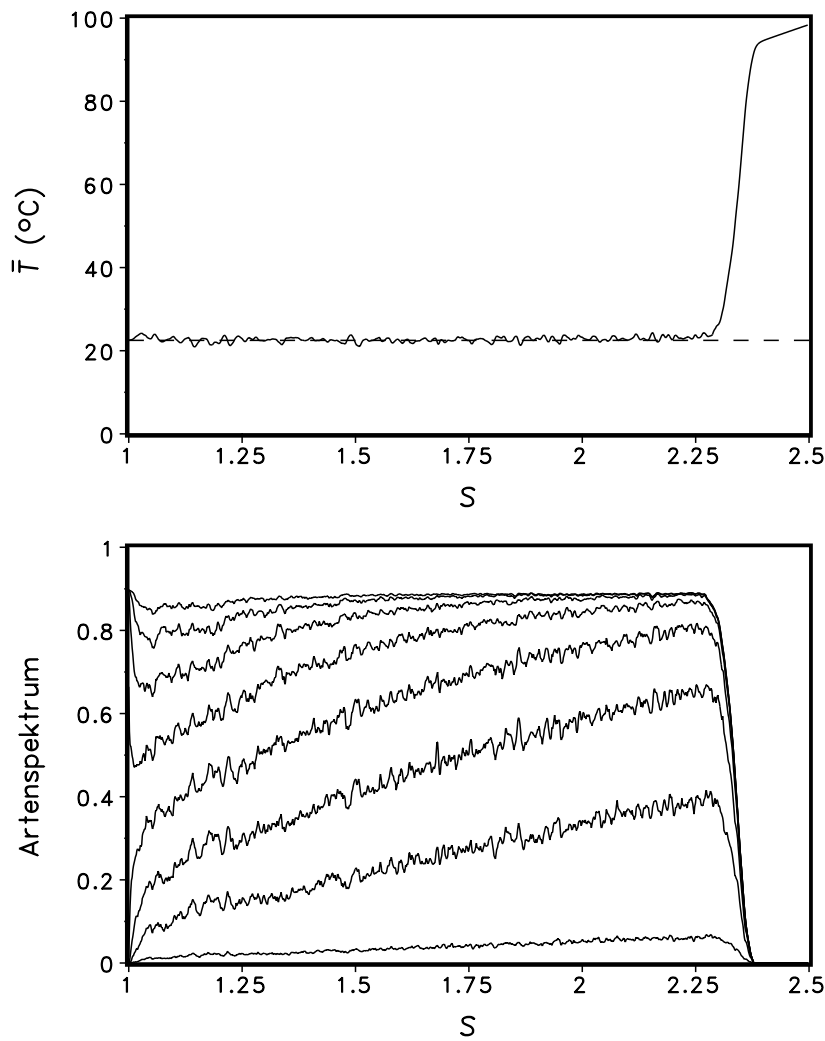


Abbildung 6.9: Oberes Bild: Mittlere Temperatur des Modells mit Mutation ($r = 0.05$) bei einer Anfangstemperatur von $T_0 = 22.5^\circ\text{C}$ bei linearer Erhöhung von S . Sämtliche Modellparameter blieben sonst unverändert. Unteres Bild: Kumulatives Artenspektrum.

solaren Einstrahlung ein unterschiedliches Verhalten (siehe Abb. 6.12): Für die Regel A, bei β von der Nächst Nachbarzelle bestimmt wird, von der aus das Wachstum initiiert wird, zeigt ein deutlich schlechteres Regelverhalten.

6.5.1 Artenspektrum bei Erhöhung von S

Die Erhöhung der solaren Einstrahlung hat auch Einfluß auf das Artenspektrum. Abb. 6.13 zeigt das Artenspektrum bei $S = 1.0$ und $S = 1.7$. Man erkennt deutlich, daß die Artendiversität, quantifiziert durch die Varianz des gaussförmigen Artenspektrums, bei zunehmender Einstrahlung abnimmt. Dies ist deutlicher in Abb. 6.14 zu sehen, in der die Standardabweichung σ als Funktion der zuneh-

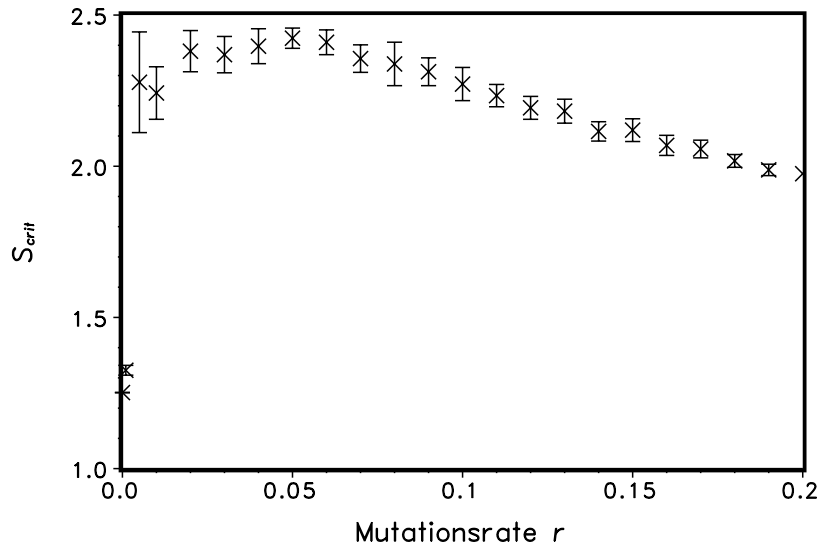


Abbildung 6.10: Kritische Einstrahlung S_{crit} gegenüber der Mutationsrate r . Die solare Einstrahlung wurde so gewählt, daß $T_0(S) = T_{\text{opt}} = 22.5^\circ\text{C}$. Die angegebenen Werte sind Durchschnittswerte aus 10 Simulationsläufen.

menden Einstrahlung S aufgetragen ist.

Betrachtet man die Wachstumsfunktion β als Funktion von $T - T_{\text{opt}}$, so wird dies Verhalten verständlich, wenn die Energiebilanzgleichung berücksichtigt wird:

$$\begin{aligned} T - T_{\text{opt}} &= [\hat{S}(1 - \alpha)/\sigma]^{\frac{1}{4}} - [\hat{S}(1 - \alpha_{\text{opt}})/\sigma]^{\frac{1}{4}} \\ &= S^{\frac{1}{4}} \frac{T_{\text{opt}}}{(1 - \alpha_0)^{\frac{1}{4}}} \left[(1 - \alpha)^{\frac{1}{4}} - (1 - \alpha_{\text{opt}})^{\frac{1}{4}} \right] \end{aligned} \quad (6.16)$$

Die Temperaturdifferenz $T - T_{\text{opt}}$, die nach (2.6) eine Abnahme der Wachstumsrate bewirkt, nimmt für steigendes S zu. Entsprechend Gl. 6.13 nimmt für $\alpha \neq \alpha_{\text{opt}}$ $N(\alpha)$ ebenfalls ab.

6.6 Hystereseeigenschaften

Bei Überschreiten einer kritischen Einstrahlung S brechen die Regeleigenschaften des Systems abrupt zusammen, sämtliche Arten sterben aus, so daß sich der Planet bei weiterer Erhöhung der Temperatur sich wie ein unbelebter verhält.

Eine interessante Fragestellung ist dabei, wie sich das System anschließend bei Absenken der Temperatur verhält, ob z.B. ein Hystereseverhalten vorliegt. Um dies analysieren zu können, müssen die Wachstumsregeln des CA modifiziert

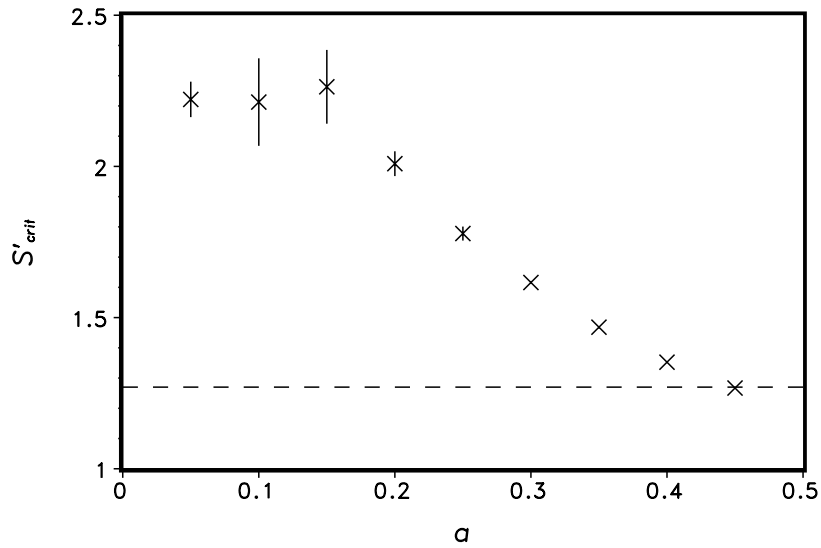


Abbildung 6.11: Kritische solare Einstrahlung S'_{crit} als Funktion des Albedointervalls $[a, 1 - a]$ der Vegetation. Die angegebenen Werte sind Durchschnittswerte aus 10 Simulationsläufen. Die horizontale Linie gibt den Wert der solaren Einstrahlung bei $T_0(S) = 40^\circ C$ an. Für $a > 0.4$ ist keine Selbstregulation mehr festzustellen.

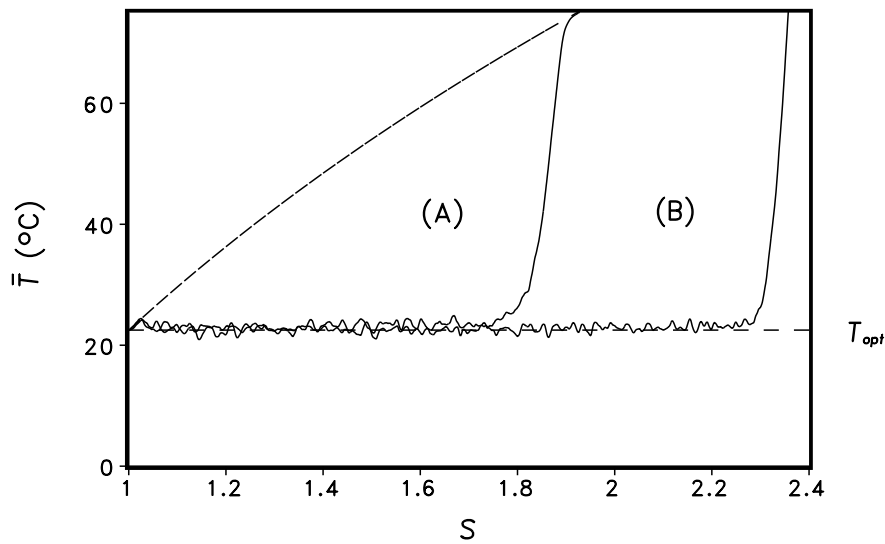


Abbildung 6.12: Globale Mitteltemperatur $\bar{T}$ als Funktion der solaren Einstrahlung S für beide Automatenregeln A und B. Mutationsrate $r = 0.05$.

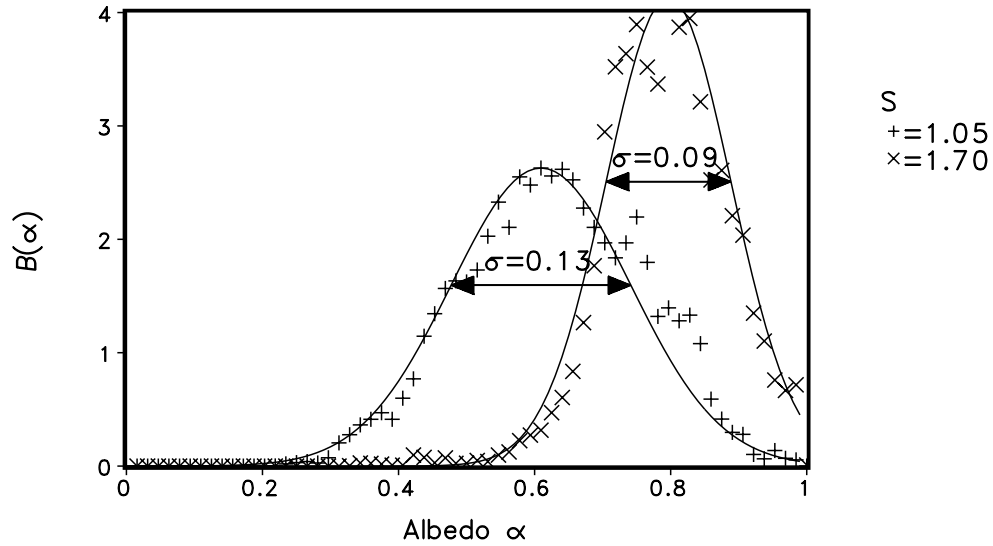


Abbildung 6.13: Artenspektrum $B(\alpha)$ für solare Einstrahlungen bei $S = 1.05$ und $S = 1.7$, Mutationsrate $r = 0.01$.

werden, da nach den bisherigen Regeln das Aussterben einen irreversiblen Prozeß darstellt. Durch Hinzunahme einer spontanen Erzeugungsrate π bei Vorliegen eines unbesetzten Gitterplatzes kann auch nach Aussterben der Vegetation eine Wiederbesiedlung ermöglicht werden, sofern die Randbedingungen dafür günstig sind. π kann dabei sehr klein gewählt werden ($\pi < 10^{-4}$), so daß der Einfluß auf das Regelverhalten minimal bleibt.

Modifizierte Regel 2.1

$$\Rightarrow \begin{aligned} c(x_i, y_j, t_{n+1}) &= \begin{cases} 1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ \alpha(x_i, y_j, t_{n+1}) &= \begin{cases} \rho & \text{falls } c(x_i, y_j, t_{n+1}) = 1, \rho \text{ Zufallszahl} \in [0, 1] \\ \alpha_0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Abb. 6.16 zeigt die zeitliche Änderung der mittleren Temperatur für das modifizierte Modell. Wird nach dem Aussterben die Temperatur abgesenkt, so setzt die Vegetation bei einer wesentlich kleineren solaren Einstrahlung wieder ein, nämlich dann, wenn die Temperatur des unbelebten Planeten unter $T_{\max} = 40^\circ\text{C}$ fällt, so daß $\beta(T) > 0$ ist.

6.7 Fragmentierung der Wachstumsfläche

Bisher wurde das Regelverhalten bei Änderung von äußeren Parametern, wie der solaren Einstrahlung S untersucht, und dabei festgestellt, daß S über einen weiten

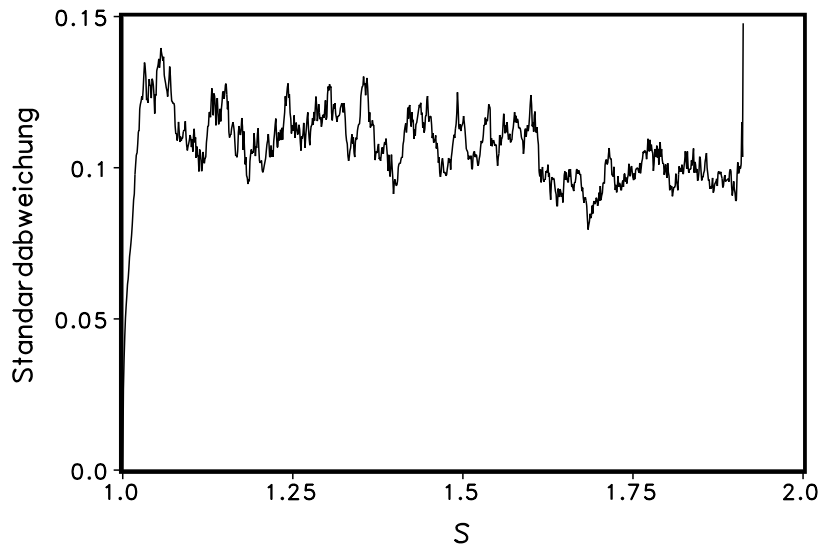


Abbildung 6.14: σ als Funktion der solaren Einstrahlung bei einer Mutationsrate $r = 0.01$.

Bereich variiert werden kann, ohne zu einer wesentlichen Änderung der mittleren Temperatur zu führen. Erst ein Überschreiten eines kritischen Wertes für S führt zu einer drastischen Änderung des Regelverhaltens.

Statt nun den äußeren Parameter Einstrahlung zu variieren, können in dem räumlichen Modell auch Änderungen in der geometrischen Struktur des Systems und deren Einfluß auf das Regelverhalten untersucht werden. Solche zeitlichen Änderungen in der räumlichen Struktur kann als ein einfaches Modell zur Fragmentierung der Landschaft angesehen werden.

6.7.1 Fragmentierung mit Hilfe des Perkulationsmodells

Das Perkulationsmodell (Stauffer und Aharony, 1992) wird als statisches Modell bezeichnet, da hier keine Aussagen über das Wachstum einer Konfiguration gegeben sind. In seiner einfachsten Formulierung werden die Gitterpunkte eines üblicherweise quadratischen Gitters ($L \times L$) mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit $p \in [0..1]$ besetzt. Die Konfiguration, die man erhält, besteht aus vielen Clustern, die sich jeweils dadurch auszeichnen, daß ihre Nachbarzellen besetzt sind, und die somit eine (mehrfach) zusammenhängende, verbundene Struktur bilden (Abb. 6.17).

Transportprozesse können nur innerhalb einer solchen verbundenen Struktur stattfinden. Es ist deshalb von besonderem Interesse, bei welcher "Besetzungswahrscheinlichkeit" p Cluster gefunden werden, die die gegenüberliegenden Grenzen des

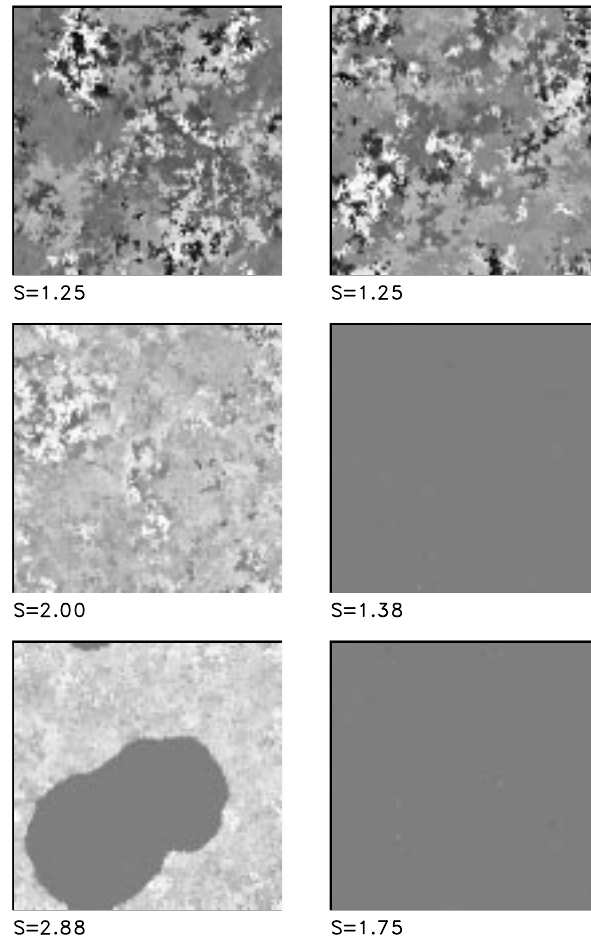


Abbildung 6.15: Räumliche Albedoverteilung für verschiedene solare Einstrahlungen S . Die Bilder auf der linken Hälfte sind bei Erhöhen, auf der rechten Seite bei Absenken von S aufgenommen worden.

benutzten Gitters miteinander verbinden (Perkolutionsfall). Dieser sogenannte “Spanning Cluster” bildet dann den Träger für z.B. die Simulation von Transport oder Durchfluß durch poröse Medien (Sickern von Wasser durch Sandlagen etc.), wobei die Porösität ϕ im Zusammenhang mit p steht und durch

$$\phi := \frac{\text{Porenraumvolumen}}{\text{Gesamtvolumen}}$$

gegeben ist. Da die Besetzung der Gitterplätze im Perkulationsmodell unabhängig von den Nachbarzellen ist, ist die Gesamtzahl aller *nicht* besetzten Porenraumpunkte durch $L^2 \cdot (1 - p)$ gegeben. ϕ ist somit gleich $1 - p$. Ein direkter Zusammenhang zwischen dem Auftreten von “Spanning cluster” und realen Durchflußphänomenen kann aber nur statistisch sein, da hier weitere Größen, wie z.B. Korngrößenverteilung und -morphologie eine Rolle spielen.

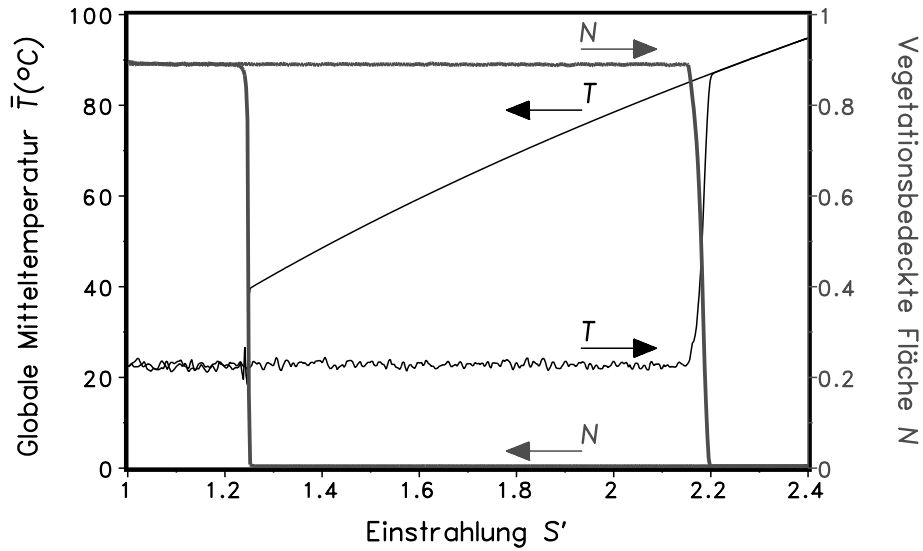


Abbildung 6.16: Verhalten bei anschließendem Absinken der solaren Einstrahlung (spontane Erzeugungsrate $\pi = 10^{-4}$).

Dennoch lassen sich wichtige Aussagen gewinnen: Unterhalb einer kritischen Wahrscheinlichkeit von $p_c = 0.59273 \pm 0.00003$ (Ziff, 1986) verhält sich der größte zusammenhängende Cluster einer *typischen* Konfiguration wie $\ln L$. Bei $p = p_c$ zeigt sich eine fraktale Struktur, d.h. die Zahl der Gitterpunkte N_s , die zum “Spanning Cluster” gehören, skaliert mit L^D ($D \approx 1.89$) und für $p > p_c$ sind die Gebilde flächenhaft.

Da, wie erwähnt die Besetzung der einzelnen Gitterplätze voneinander unabhängig erfolgt, läßt sich auch eine andere Vorgehensweise realisieren. Man wählt einen Startpunkt und besetzt die Randpunkte mit der Wahrscheinlichkeit p oder “immunisiert” sie mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p$. Mittels dieser Technik entsteht eine einzelne, zusammenhängende Struktur, die für verschiedene p das oben beschriebene Verhalten widerspiegelt: Für $p < p_c$ “sterben” die Strukturen nach einer endlichen Anzahl von Schritten aus. Bei $p = p_c$ wird die Struktur erstmalig mit hoher Wahrscheinlichkeit beliebig groß und zeigt Struktur über viele Skalen ($N_{cl} \propto r^{1.89}$). Wenn $p > p_c$ ist, entsteht ein kompaktes Gebilde. Diese Modifikation des Perkulationsmodells entspricht dann dem Epidemie Modell.

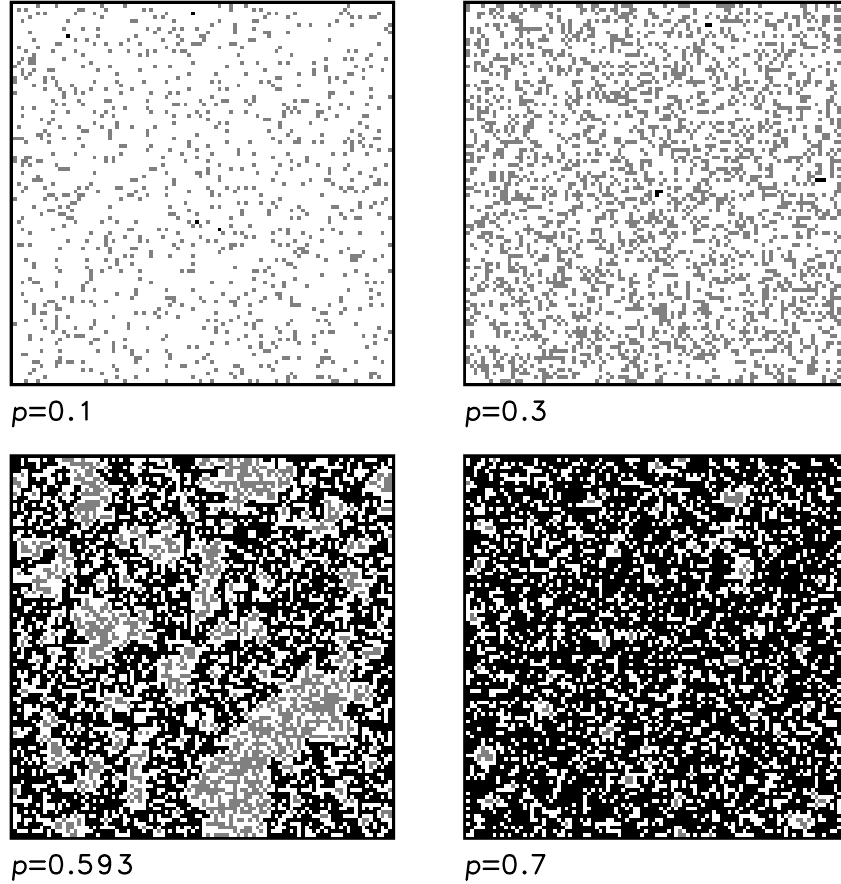


Abbildung 6.17: Cluster für verschiedene p , ($p = 0.3$, $p = 0.5$, $p = p_c = 0.593$, $p = 0.7$). Ein zusammenhängender Cluster ist jeweils dunkel markiert.

6.7.2 Modifikationen des Automatenmodells

Mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit p_0 wird eine Zelle (i, j) in einem Zeitschritt t_n des CA als nicht mehr bewachbar gekennzeichnet, d.h. für alle $k > n$ gilt:

$$c(i, j, t_k) = 0, \alpha(i, j, t_k) = \alpha_0 \text{ für alle } k > n$$

Diese Wahrscheinlichkeit ist unabhängig von dem Zustand der Zelle und deren Nachbarzellen, insbesondere hängt sie nicht davon ab, ob die Zelle besetzt oder unbewachsen ist. Die physikalischen Eigenschaften, wie Wärmeleitung, -kapazität und Albedo entsprechen einer unbewachsenen Zelle in dem CA. Nach n Zeitschritten bestimmt sich die Wahrscheinlichkeit $p(t_n)$, für eine beliebige Zelle (i, j) des Automaten nicht als bewachbar gekennzeichnet zu sein, nach

$$p(t_n) = 1 - (1 - p_0)^n.$$

Die Wahrscheinlichkeiten p sind unabhängig vom Zustand der Nachbarzellen und der Ausdruck $1 - p(t_n) = (1 - p_0)^n$ gibt im Mittel den Flächenanteil des Lebensraums der Pflanzen an. Für $n \rightarrow \infty$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} p(t_n) = 1$, d.h. die Oberfläche besteht komplett aus nicht mehr bewachsene Zellen. Für endliche n ist p immer echt kleiner als 1.

Die Hauptfragestellung ist nun, wie sich der abnehmende Lebensraum der Pflanzen auf deren Regelfähigkeit für das Gesamtsystem auswirkt. Hierzu wird die solare Einstrahlung auf einen Wert eingestellt, so daß die Gleichgewichtstemperatur T_0 des unbewachsenen Planeten von T_{opt} abweicht, z.B. $T_0 = 40^\circ\text{C}$ beträgt. Die Keimungswahrscheinlichkeit π wurde zu 0 gewählt, die Mutationsrate r auf 0.01, alle anderen Parameter entsprechend. Tab. (6.2). Die verschwindende Keimungswahrscheinlichkeit verhindert die Rückbesiedlung unbewachsenener Gebiete.

Eine Simulation zur Fragmentierung der Landschaft wurde für $p_0 = 1.25 \cdot 10^{-6}$ und $1 \cdot 10^6$ Iterationen durchgeführt bei einer Gittergröße von 400×400 . Die Fragmentierung wurde erst gestartet, nachdem das System im Gleichgewicht war. Die resultierende mittlere Temperatur und das Artenspektrum für zunehmende Fragmentierung ist in Abb. 6.18 graphisch dargestellt. Aufgrund des Regelverhaltens der Pflanzen stellt sich nach wenigen Iterationen ($\approx 10^4$) eine Temperatur von $\bar{T} \approx 22.5^\circ\text{C}$ ein. Dabei ist zu beobachten, daß dieser Wert von $\bar{T}$ bis zu $p \approx 0.4$ erstaunlich stabil gehalten wird, erst in dem Bereich von $0.4 < p < 0.5$ weicht er zunehmend vom Optimum ab. Bei $p > 0.56$ ist der Wert $T = T_0$ des unbewachsenen Planeten erreicht.

6.7.3 Erklärung des Verhaltens

Das Verhalten läßt sich für p in drei Bereiche aufteilen:

1. $0 \leq p < 1 - p_c \approx 0.407$. In diesem Bereich regelt das System die Temperatur auf den optimalen Wert für die Vegetation. Der Wachstumsraum bildet ein mehrfach zusammenhängendes Gebiet.
2. $1 - p_c \leq p < p_c$. In diesem Bereich zerfällt der Wachstumsraum in nicht zusammenhängende Cluster. Die globale Mitteltemperatur weicht zunehmend von der optimalen Wachstumstemperatur ab, d.h. das Selbstregulationsvermögen läßt sukzessive nach.
3. $p_c \leq p \leq 1$. In diesem Bereich bildet der zum Wachstumsraum komplementäre Raum einen zusammenhängenden Cluster. Ein Selbstregulationsvermögen ist nicht mehr festzustellen und die Vegetation stirbt schließlich aus.

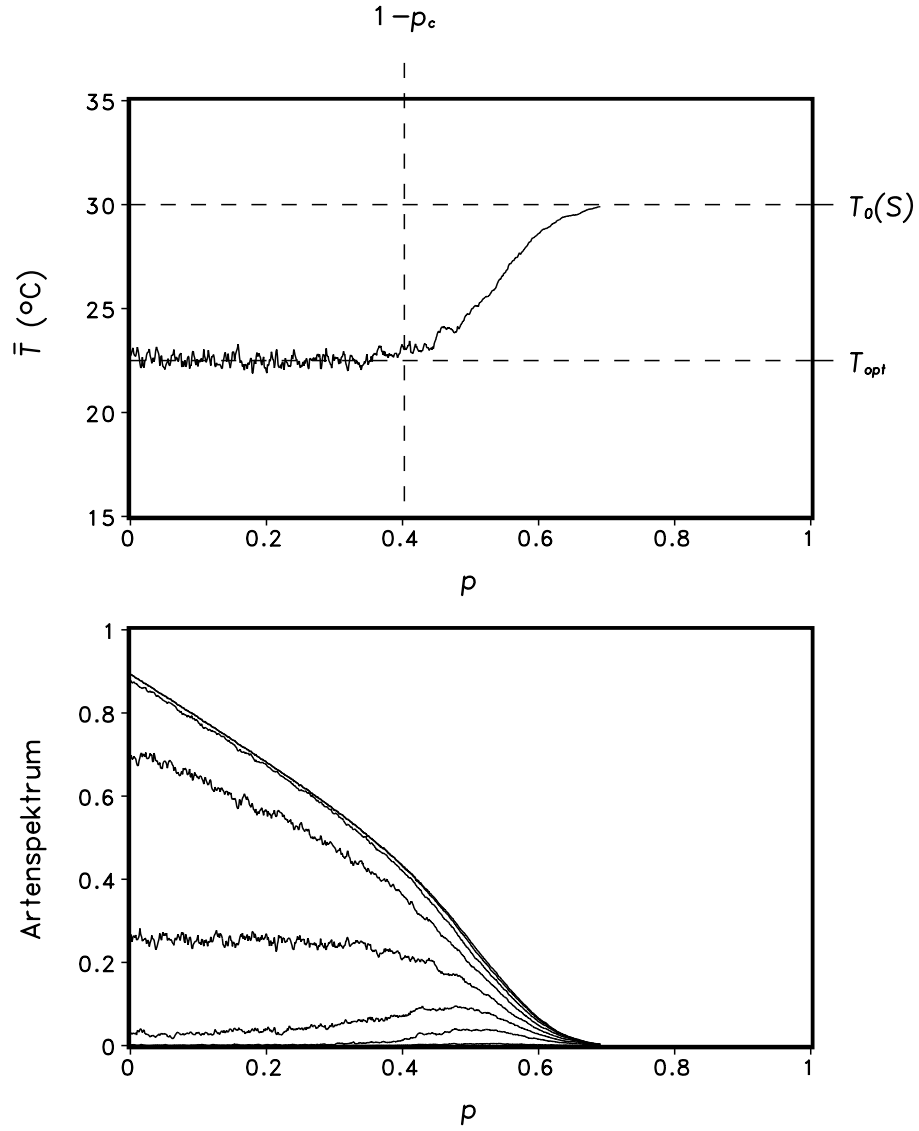


Abbildung 6.18: Oberes Bild: Mittlere Temperatur in Abhängigkeit von der unbewachsenen Fläche p . Anzahl der Iterationen: $N = 10^6$, Temperatur des unbewachsenen Planeten $T_0 = 35^\circ\text{C}$. Unteres Bild: Korrespondierendes Artenspektrum.

Die Änderung der mittleren Temperatur bei Erreichen der Perkolationsschwelle sollte dabei als geometriebedingter Effekt zumindest für ein Intervall von T_0 unabhängig von der solaren Einstrahlung sein. Zu große Werte von S bzw. T_0 können schon vor Erreichen der Perkolationsschwelle zu einem Zusammenbruch des Regelverhaltens führen. Das ist dann der Fall, wenn die unbewachsene Fläche p so stark die Oberfläche aufheizt, daß das System instabil wird.

Um die Unabhängigkeit von dem Parameter S nachzuweisen, wurde die Simulation für eine Reihe von unterschiedlichen solaren Einstrahlungen wiederholt. Die resultierende mittlere Temperatur gegenüber p ist in Abb. 6.19 graphisch dargestellt. Man erkennt, daß der Zusammenbruch für alle Einstrahlungen mit $0^\circ\text{C} < T_0 < 50^\circ\text{C}$ bei $1 - p_c$ erfolgt, also nicht von S abhängt. Dieses Verhalten ließ sich bei dem räumlich nulldimensionalen Modell nicht beobachten (siehe Abb. 2.7 in Abschnitt 2.3), bei dem kein konstanter kritischer Wert für den Zusammenbruch festgestellt wurde.

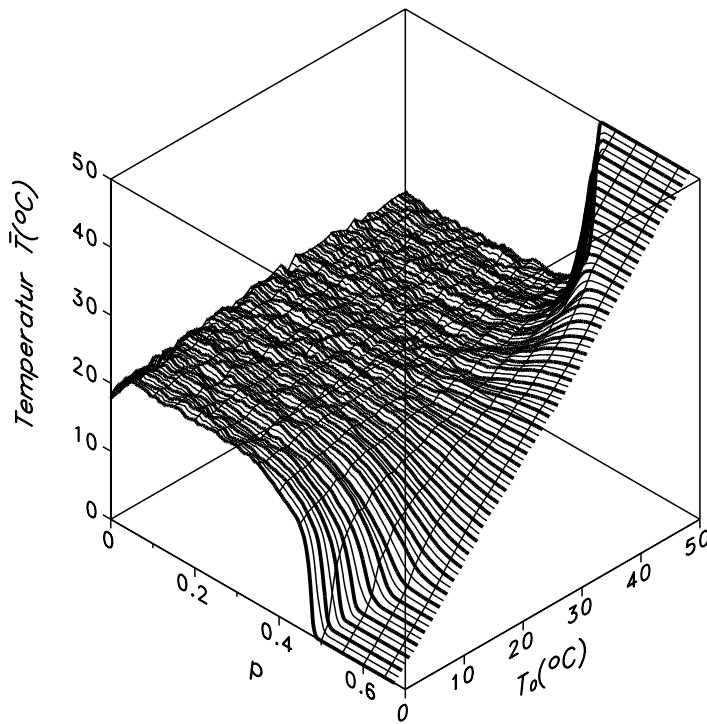


Abbildung 6.19: Die Mitteltemperatur $\bar{T}$ als Funktion der solaren Einstrahlung (parametrisiert durch $T_0(S)$) und Fragmentierungsrate p .

Der zunehmend unbewachsene Anteil bewirkt mit der Albedo α_0 bei einer Einstrahlung mit $T_0 > T_{\text{opt}}$ eine zunehmende Aufheizung des Planeten. Um diesen Effekt zu unterdrücken, kann man als Variante des Modells die Wärmelei-

tung einer aus dem Wachstumsraum herausgenommenen Zelle unterbinden, d.h. $D_T(x_i, y_j) = 0$, falls Zelle (x_i, y_j) nicht mehr Element des Wachstumsraums ist. Mögliche Veränderungen im Regelverhalten bei zunehmender Fragmentierung sind dann nur auf die veränderte Geometrie bzw. den verringerten Wachstumsraum zurückzuführen.

Mit diesem variierten Modell sind analog zum vorherigen Abschnitt für verschiedene Einstrahlungen die Simulationen durchgeführt worden. Auch bei dem modifizierten Modell ergibt sich ein von der Einstrahlung unabhängiges Verhalten (siehe Abb. 6.20). Bei $p \approx 1 - p_c$ weicht die mittlere Temperatur zunehmend von T_{opt} ab. Dabei muß beachtet werden, daß die mittlere Temperatur T nur von den Zellen bestimmt wird, die noch bewachsen werden können. Für die über alle Zellen gemittelte Temperatur $\bar{T}$ gilt der Ausdruck

$$\bar{T} = T_0 p + (1 - p) T_p$$

aufgrund der verschwindenden Wärmeleitung der fragmentierten Zellen. Dieser Ausdruck variiert auch bei konstantem T_p mit p .

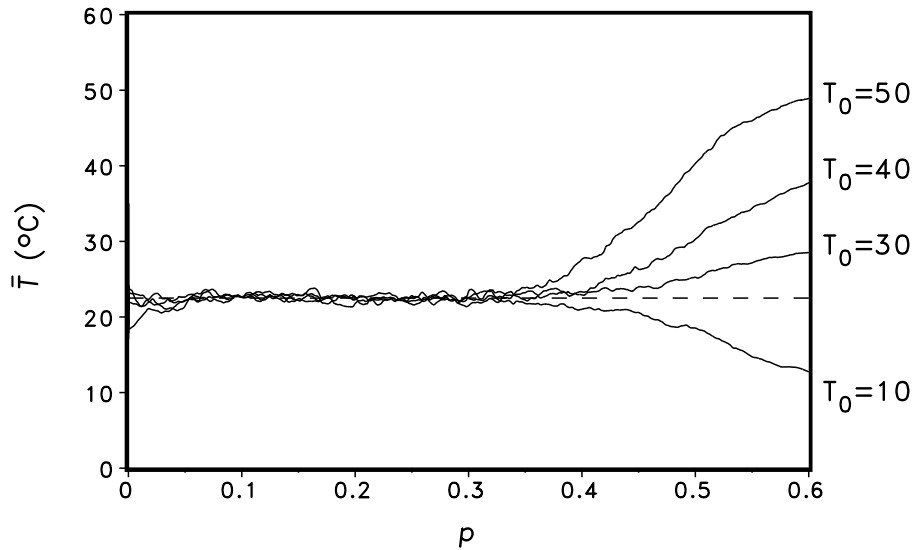


Abbildung 6.20: Mittlere Temperatur in Abhängigkeit von dem Fragmentierungsgrad p für verschiedene konstante solare Einstrahlungen S . Die Wärmeleitung D_T ist für die Gesteinsfläche gleich Null. T ist die über alle bewachsene Zellen gemittelte Temperatur. An der rechten Seite ist für jede Kurve die zu S korrespondierende Gleichgewichtstemperatur T_0 des unbelebten Planeten bezeichnet. Gittergröße: 400×400 .

6.7.4 Einfluß der Systemgröße

Die Perkulationsstudien beschränkten sich bis jetzt auf eine Gittergröße von 400×400 . Um den Einfluß der Gittergröße auf das Verhalten an der Perkulationsschwelle abzuschätzen, wurden die Rechnungen für verschiedene Gittergrößen wiederholt. In Abb. 6.21 sind die globalen Temperaturen gegenüber dem Parameter p aufgetragen. Man erkennt, daß ab einer Systemgröße von 400 sich das Verhalten an der Perkulationsschwelle nicht mehr wesentlich ändert.

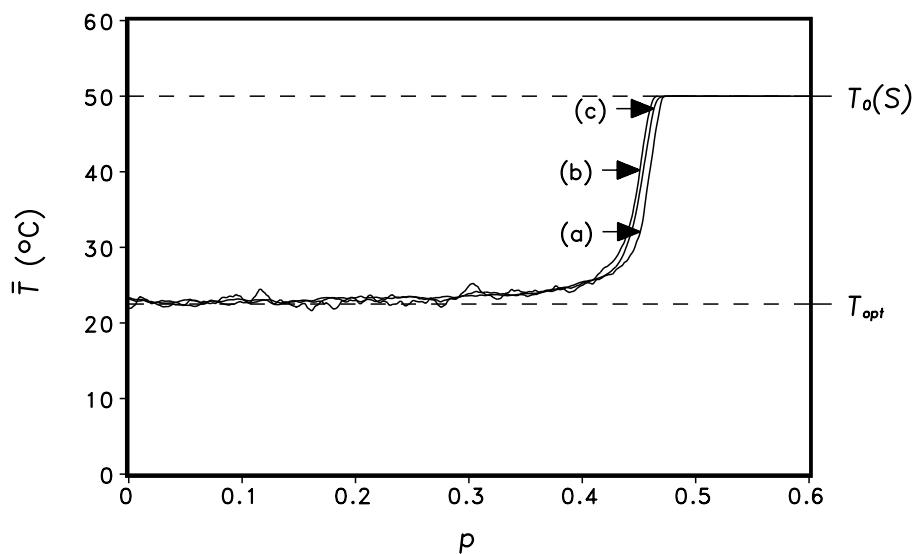


Abbildung 6.21: Entwicklung der globalen Temperatur gegenüber Parameter p für verschiedene Systemgrößen: (a) $L = 200$, (b) $L = 400$, (c) $L = 800$.

6.7.5 Einfluß der Fragmentierung auf das Artenspektrum

Es stellt sich nun die Frage, ob die zunehmende Fragmentierung eine ähnlich negativen Einfluß auf die Artenvielfalt hat, wie unter Erhöhung der solaren Einstrahlung. Dazu wird die Varianz σ des Artenspektrums $B(A)$ bei konstanter optimalen Einstrahlung ($T_0(S) = T_{opt}$) und zunehmender Fragmentierung p bestimmt. Das Ergebnis ist in Abb. 6.22 dargestellt. Man erkennt deutlich, daß die Biodiversität bis zum Erreichen der Perkulationsschwelle konstant bleibt, um dann kontinuierlich zuzunehmen. Aufgrund der Aufsplitterung des Wachstumsraum in unabhängige Gebiete wird die Konkurrenz zwischen den Arten zunehmend behindert; es können sich ökologische Nischen nicht so gut angepaßter Arten ausbilden.

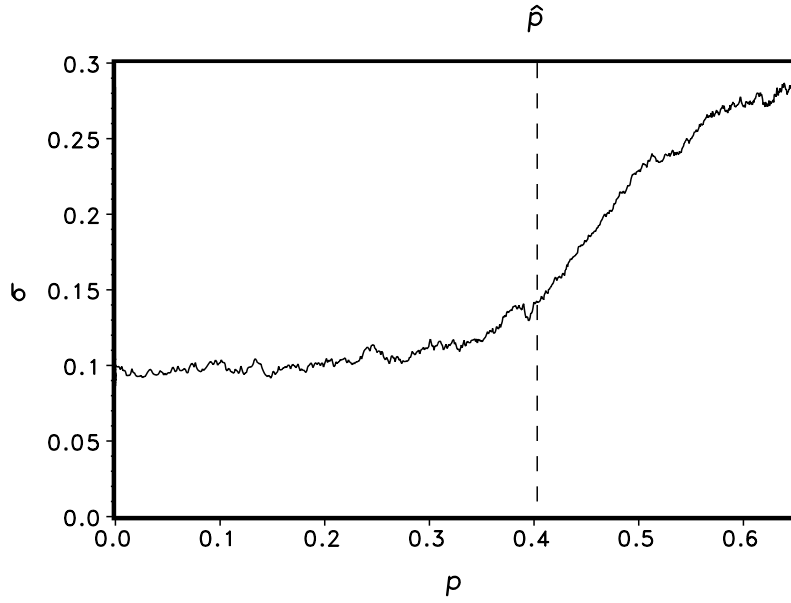


Abbildung 6.22: Biodiversität quantifiziert durch die Standardabweichung σ des Artenspektrums als Funktion der zunehmenden Fragmentierung p . $S = 1$, d.h. $T_0(S) = T_{\text{opt}}$.

Dieser Gewinn an Biodiversität ist aber mit einem Verlust der Regelfähigkeit gekoppelt, die sich in einem Ansteigen der Globaltemperatur äußert.

6.7.6 Vergleich mit trivialer Reduzierung des Wachstumsraums

Sei $L \in \mathbb{N}$ die Gittergröße, so daß für Gitterzellen (x_i, y_j) gilt:

$$-L/2 < x_i, y_j \leq L/2$$

Eine triviale Reduzierung des Wachstumsraums ist dann durch eine stetige Verkleinerung des Wachstumsraumes gegeben:

$$c(x_i, y_j, t_n) = 0 \text{ für } |x_i| \vee |y_j| > d/2,$$

wobei $d \equiv d(t_n)$, $d(0) = L$, und $d(t_n) \rightarrow 0$ für $t_n \rightarrow \infty$. d.h., daß der Wachstumsraum die Form eines Quadrates der Fläche d^2 annimmt. Der Anteil der vom Wachstumsraum ausgeschlossenen Zellen berechnet sich zu

$$p(t_n) = 1 - \left(\frac{d(t_n)}{L} \right)^2 =: \pi.$$

Abb. 6.23 zeigt die globale Temperatur in Abhängigkeit dem monoton steigenden Anteil p der unbewachsbaren Zellen. Im Gegensatz zu dem Perkulationsmodell

ist keine Regelung der *globalen* Mitteltemperatur festzustellen. Vielmehr steigt sie linear mit π an in der Form

$$\bar{T}(\pi) = \pi \cdot T_0(S) + (1 - \pi)T_{\text{opt}}. \quad (6.17)$$

Dieser Effekt lässt sich aufgrund der unterschiedlichen Grenzflächen zwischen Wachstumsraum und “toten” Zellen erklären: Im Perkulationsfall sind fast alle $N_1 = pL^2$ nicht bewachsbare Zellen von bewachsbaren Zellen umgeben, während bei der trivialen Reduktion nur ein sehr geringer Teil

$$N_2 = 4L(1 - \pi)^{\frac{1}{2}} \ll N_1$$

miteinander in Kontakt stehen. Die Größe der Oberfläche N_1, N_2 gibt aber eine Grenze für den möglichen Wärme fluß zwischen den unterschiedlichen Bereichen an, der zur Aufrechterhaltung der homöostatischen Fähigkeiten des Gesamtsystems notwendig ist.

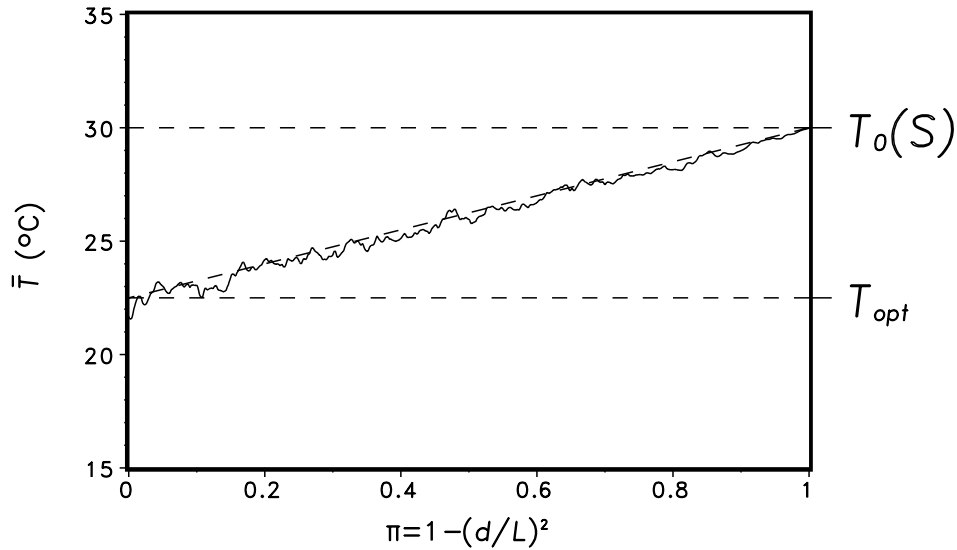


Abbildung 6.23: Entwicklung der globalen Mitteltemperatur $\bar{T}$ bei zunehmenden Anteil π der nicht bewachsbaren Fläche bei trivialer Reduzierung des Wachstumsraums. Die gestrichelte Linie gibt den Verlauf nach Gl. 6.17 wieder.

Aufgrund des im Verhältnis zur Gesamtgröße des Gitters sehr kleinen Wertes von N_2 befindet sich der Wachstumsraum bei der trivialen Reduktion auf einer Temperatur $T \approx T_{\text{opt}}$ und die nicht bewachsbare Fläche auf $T \approx T_0(S)$, so daß sich eine globale Temperatur nach (6.17) ergibt.

Kapitel 7

Zusammenfassung

Die in den Abschnitten 2 bis 5 vorgestellten, räumlich nulldimensionalen Modelle zeigen trotz ihrer Einfachheit interessante, z.T. auch unerwartete Systemeigenschaften, die sich auch in komplexeren Systemen wiederfinden lassen:

- Die Modelle sind durch Multistabilität gekennzeichnet: Welcher stationäre Zustand erreicht wird, hängt von den Anfangsbedingungen ab. Die verschiedenen stationären Lösungen weichen in ihren Werten bezüglich Temperatur und Vegetation zum Teil erheblich voneinander ab.
- Die Anzahl der stationären Lösungen nimmt mit der Komplexität des Systems zu. Das einfachste Modell, bestehend aus zwei Gleichungen für Temperatur und Vegetation, hat maximal zwei stationäre Lösungen. Die Hinzunahme des Kohlenstoffkreislaufs erhöht die Zahl der stationären Lösungen auf drei.
- Die erreichten Gleichgewichte sind sensibel gegenüber externen oder internen Störungen. Kleine Veränderungen in der Temperatur oder in der Vegetationsverteilung können zum Umspringen auf ein neues Gleichgewicht führen, mit einer völlig anderen Lösung. Als Beispiel sei der Übergang vom “kalten grünen” Planeten zum “heißen grünen” (siehe Abb. 5.8) mit einem drastisch reduzierten Vegetationsanteil angeführt.
- Die Emergenz von Vegetation aus dem Zustand des unbelebten Planeten ist an bestimmte Parameter gebunden, wie z.B. dem Gesamtkohlenstoff in Atmosphäre und Vegetation und der maximalen Produktivität. Daß die Temperatur innerhalb des Toleranzintervalls der Vegetation $[T_{\min}, T_{\max}]$ liegt, ist dabei eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung.

Die Berücksichtigung von räumlichen Abhängigkeiten des Lovelock-Watson-Modells erweitert das Spektrum:

- Die räumlich explizite Formulierung des Lovelock-Watson-Modells ermöglicht die Koexistenz beliebig vieler Arten.
- Die Einbeziehung von Mutation der Albedo erweitert das Regelverhalten; es kann eine optimale Mutationsrate ermittelt werden, für die die kritische solare Einstrahlung, bei der das System zusammenbricht, maximal ist.
- Unter zunehmendem externen Streß des Systems nimmt die Biodiversität ab, das Artenspektrum verengt sich mit zunehmender solaren Einstrahlung.
- Eine Fragmentierung der Landschaft in voneinander unabhängige Habitate verschlechtert die Stabilität der Ökosphäre, d.h. die Fähigkeit externe Störungen wegzuregulieren zu können. Die Habitatfragmentierung führt aber zu einer höheren Biodiversität, da die Konkurrenz der verschiedenen Arten stark behindert wird und sich somit Nischen für schlecht angepasste Arten bilden können.

Das als Basis in dieser Arbeit benutzte Daisy-World-Modell ist als "Karikatur" eines virtuellen Planeten entwickelt worden, um exemplarisch die homöostatischen Eigenschaften eines gekoppelten Biogeosphärenmodells aufzuzeigen. Über eine Plausibilisierung der Gaia-Hypothese hinaus ist aber mit den hier präsentierten Ergebnissen demonstriert worden, daß diese Art der Modellbildung sich auch als ein neuer Ansatz zur Erdsystemanalyse anbietet. Zum anderen lassen sich mit den vorgestellten Modellen Phänomene des Erdsystems mit einer einfachen Beschreibungsweise verdeutlichen.

Das entwickelte Automatenmodell bietet sich insbesondere zur Analyse des Einflusses räumlicher Effekte auf, z.B., die Biosphäre an. Es läßt sich dabei an einer Erweiterung um ein einfaches Modell einer Nahrungskette denken. Eine interessante Fragestellung wäre in einer um ein Jäger-Beute-Modell ergänzten Daisy-World die Sensibilität der Jäger gegenüber Fragmentierung. Ein weiterer Punkt wäre durch das Ersetzen des sehr einfachen Perkulationsmodells zur Landschaftsfragmentierung durch ein komplexeres gegeben. Damit wäre eine realistischere Modellierung einer durch anthropogenen Einfluß (Zersiedlung durch Städte o.ä.) fragmentierten Landschaft möglich. Die hier kurz angedachten Möglichkeiten zur Modellerweiterungen zeigen, daß basierend auf den entwickelten Modellen noch ein großes Potential an zu bearbeitenden Fragestellungen vorhanden ist.

Literatur

- Almasi, G.S., Gottlieb, A.J. 1989. *Highly parallel computing*. Benjamin Cummings, Redwood City, Kalifornien.
- von Bloh, W., Block, A., Schellnhuber, H.-J. 1997. Self-stabilization of the biosphere under global change: a tutorial geophysiological approach. *Tellus* **49B**, 249-262.
- Bolin, B. et al. 1996. *Climate Change 1995: The IPCC Second Assessment Report*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Budyko, M.I., 1969, The effect of solar radiation variations on the climate of the earth, *Tellus* **21**, 611-619.
- Caldeira, K., Kasting, J.F. 1992. The life span of the biosphere revisited. *Nature* **360**, 721-723.
- Charlson, R.J., Lovelock, J.E., Andreae, M.O., Warren, S. 1987. Oceanic phytoplankton, atmospheric sulphur, cloud albedo and climate. *Nature* **326**, 655-661.
- De Gregorio, S., Pielke, A., Dalu, G.A. 1992. Feedback Between a Simple Biosystem and the Temperature of the Earth. *J. Nonlinear Sci.* **2**, 263-292.
- Doolen, G. (Hrsg.) 1990. *Lattice Gas Methods for Partial Differential Equations*. Addison Wesley.
- Esser, G. 1991. Osnabrück Biosphere Modelling and Modern Ecology. In: Esser, G., Overdieck, D. (Hrsg.). *Modern Ecology. Basic and applied aspects*. Elsevier, Amsterdam, 771-804.
- Feder, J. 1988. *Fractals*. Plenum Press, New York, 104-148.
- Franck, S., Kossacki, K., Bounama, C. 1999. *Modelling the Global Carbon Cycle for the Past and Future Evolution of the Earth System*. *Chemical Geology* **159**, 305-317.
- Franck, S., Block, A., von Bloh, W., Bounama, C., Schellnhuber, H.-J., Svirezhev, Y.M. 1999. Reduction of Biosphere Life Span as a Consequence of Geodynamics. Akzeptiert zur Veröffentlichung bei Tellus B.

- Goles, E.(Hrsg.) 1994. *Cellular automata, dynamical systems and neural networks*. Kluwer Acad. Pub., Dordrecht.
- Goody, R.M. 1964. *Atmospheric radiation. I. Theoretical basis*. Clarendon Press, Oxford, 552.
- Gropp, W., Lusk, E., Skejellum, A. 1994. *Using MPI*. The MIT Press, Cambridge, MA.
- Hale, H., Kocak, H. 1991, *Dynamics and Bifurcation*, Springer Verlag, Berlin.
- Hamilton, W.D., Lenton, T.M. 1998. Spora and Gaia: how microbes fly with their clouds. *Ethology Ecology & Evolution* **10**, 1-16.
- Henderson-Sellers, A., McGuffie, K. 1990. *A climate modelling primer*. John Wiley & Sons, Chichester.
- IGBP, 1994. IGBP in Action: Work Plan 1994 -1998, IGBP Report 28, The International Geosphere-Biosphere Programme: A study of Global Change (IGBP) of the International Council of Scientific Unions (ICSU), Stockholm.
- Isakari, S.M., Somerville, R.C.J. 1989. Accurate numerical solutions for Daisy-world. *Tellus* **41B**, 478-482.
- James, F. 1990. *Computer Physics Communication* **60**, 329.
- Kostitzin, V.A. 1935. *L'evolution de l'atmosphere: circulation organique, epoques glaciares*. Hermann, Paris, 123.
- Kropp, J., von Bloh, W., Klenke, T. 1996. Calcite formation in microbial mats: modelling and quantification of inhomogeneous distribution patterns by a cellular automaton model and multifractal measures. *Geol. Rundsch.* **85**, 857-863.
- Krumbein, W.E. (Hsrg) 1983. *Microbial Geochemistry*. Blackwell, Oxford, pp 330.
- Lenton, T.M. 1998. Gaia and natural selection, *Nature* **394**, 439-447.
- Levin, S.A. 1976. Population dynamics in heterogeneous environments. *Ann. Rev. Ecol. Syst.* **7**, 287-310.
- Lovelock, J.E. 1965. A physical basis for life detection experiments, *Nature* **207**, 568-570.
- Lovelock J.E., Margulis L. 1974. Atmospheric homeostasis by and for the biosphere: the Gaia hypothesis, *Tellus* **26**, 2-10.
- Lovelock, J.E., Whitfield, M. 1982. Life span of the biosphere. *Nature* **296**, 561-563.

- Lovelock, J.E. 1989. *The ages of Gaia*. Oxford University Press, Oxford.
- Lovelock, J.E. 1991. *GAIA - the practical science of planetary medicine*. GAIA Books, London.
- Marsal, D. 1989. *Finite Differenzen und Elemente*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg.
- Lüdeke, M.K.N., Dönges S., Otto, R.D., Kindermann, J., Badeck, F.-W., Ramge, P., Jäkel, U., Kohlmaier, G.H. 1995. Responses in NPP and carbon stores of the northern biomes to a CO₂-induced climatic change, as evaluated by the Frankfurt biosphere model (FBM). *Tellus* **47B**, 191-205.
- Margulis, L., Lovelock, J.E. 1974. Biological modulation of the Earth's atmosphere. *Icarus* **21**, 471-489.
- Moisey, N.N., Svirezhev, Y.M. 1979. Systems analysis of the biosphere dynamics: Minimal model of the biosphere. *USSR Acad. Sci. Herald* **2**, 47-58.
- Ott, E., Sauer, T., Yorke, J.A. 1994. *Coping with Chaos*. Wiley Series in Nonlinear Science. John Wiley & Sons, New York.
- Petoukhov, V. 1995, Parametrization of the outgoing longwave radiation flux to be used in zero-dimensional "climate + biosphere" model, in Svirezhev, Y.M. (Hrsg.), *Toys: materials to Brandenburg Biosphere Model*, PIK Report, Potsdam.
- Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T. 1988. *Numerical recipes in C*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Robock, A. 1980. The seasonal cycle of snow cover, sea-ice and surface albedo, *Mon. Wea. Rev.* **108**, 267-285.
- Sagan, C., Mullen, G. 1972. Earth and Mars: Evolution of atmospheres and surface temperatures. *Science* **177**, 52-56.
- Saunders, P.T. 1994. Evolution without natural selection: Further implications of the Daisyworld parable. *J.theor.Biol.* **166 (4)**, 365-373.
- Schellnhuber, H.-J., von Bloh, W. 1993. *Homöostase und Katastrophe*, in: Schellnhuber, H.-J., Sterr, H., (Hrsg.), *Klimaänderung und Küste*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg.
- Schellnhuber, H.-J., Wenzel V. (Hrsg.) 1998. *Earth System Analysis: Integrating science for sustainability*. Springer Verlag, Berlin.
- Schuster, H.G. 1989. *Deterministic chaos: an introduction*. Verlag Chemie, Weinheim.
- Stauffer, D., Aharony, A. 1992. *Introduction to Percolation Theory*, 2nd ed.. Taylor and Francis, London.

- Svirezhev, Y.M., 1978, *Nonlinear waves, dissipative patterns and catastrophes in ecology*, Nauka, Moskau.
- Svirezhev, Y.M., von Bloh, W. 1996. A minimal model of interaction between climate and vegetation: qualitative approach, *Ecol. Mod.* **92**, 89-99.
- Svirezhev, Y.M., von Bloh, W. 1997. Climate, vegetation, and global carbon cycle: the simplest zero-dimensional model, *Ecol. Mod.* **101**, 97-95.
- Svirezhev, Y.M., von Bloh, W. 1998. A zero-dimensional climate-vegetation model containing a global carbon and hydrological cycle. *Ecol. Mod.* **106**, 119-127.
- Svirezhev, Y.M., von Bloh, W. 1998. Climate Change Problem and Dynamical Systems: Virtual Biospheres Concept. In: Leitmann, G., Udawadia, F., Kryazhinskii, A.V. (Hsrg.). *Stability and control: Dynamics and control*, OPA Overseas Publishing Associates, UK, im Druck.
- Vernadsky, V.I. 1926. *The biosphere*. Nauchtechizdat, Leningrad.
- Volk, T. 1998. *Gaia's body. Toward a physiology of Earth*. Copernicus, Springer Verlag, New York.
- Walter, H., Breckle, S.-W. 1991. *Ökologie der Erde*, Vol. 1-4. Gustav Fischer Verlag, Stuttgart.
- Watson, A.J., Lovelock, J.E. 1982. The regulation of carbon dioxide and climate. Gaia or geochemistry? *Planet. Space Sci.* **30**, 793-802.
- Watson, A.J., Lovelock, J.E. 1983. Biological homeostasis of the global environment: the parable of Daisyworld. *Tellus* **35B**, 286-289.
- WCRP (World Climate Research Programme), 1994. Draft of the WCRP Long-term Plan 1996-2005.
- Wolfram, S. 1986. *Theory and Applications of Cellular Automata*. World Scientific, Singapore.
- Zeng, X., Pielke, R.A., Eykholt, R. 1990. Chaos in Daisyworld. *Tellus* **42B**, 309-318.
- Ziff, R.M. 1986, Test of scaling exponents for percolation-cluster perimeters. *Phys. Rev. Lett.* **56**, 545-548.

Danksagung

Die Beschäftigung mit geophysiologischen Modellen wurde von Herrn Prof. Dr. Schellnhuber angeregt. Prof. Dr. Svirezhev hat mir entscheidende Impulse bei den Modellen zum virtuellen Biosphärenkonzept gegeben. Beiden möchte ich für die Unterstützung danken, die zu dieser Arbeit geführt haben. Besonderen Dank gilt Herrn Dr. Arthur Block für seine kooperative Mitarbeit.

Ein Großteil der numerischen Rechnungen zum zellulären Automatenmodell sind auf dem Parallelrechner IBM SP des Potsdam Instituts für Klimafolgenforschung durchgeführt worden. Als Mitglied der Abteilung Data & Computation danke ich allen allen Mitarbeitern, die mich dabei unterstützt haben.

Lebenslauf

Name: Werner von Bloh
Geburtsdatum: 26.11.1963
Geburtsort: Oldenburg (Oldb)
Staatsangehörigkeit: deutsch

- 06.08.1970 Einschulung in die Grundschule Staakenweg in Oldenburg.
- 1974 Wechsel auf die Orientierungsstufe im Schulzentrum Eversten.
- 1976 Besuch des Gymnasiums Eversten in Oldenburg.
- 09.05.1983 Abitur
- 01.10.1983 Immatrikulation für den Studiengang Physik an der Universität Oldenburg.
- 29.07.1985 Vordiplom in Physik.
- 12.10.1989 Diplom in Theoretischer Physik, Titel der Arbeit: "Simulation und Analyse von irreversiblen Aggregationsprozessen mittels Parallelrechnern" (Betreuer: Prof. Dr. Hans-Joachim Schellnhuber, Zweitgutachter: Dr. Lutz Polley).
- 01.11.1989 Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Universität Oldenburg in der Arbeitsgruppe komplexe Systeme und dem Institut für Chemie und Biologie des Meeres (ICBM).
- 01.09.1993 Wissenschaftlicher Mitarbeiter in der Abteilung Data & Computation am Potsdam Institut für Klimafolgenforschung e.V. (PIK).