

# Modellierung endemischer und epidemischer Prozesse

Endemien und Epidemien beinhalten eine Vielzahl von typisch und atypisch verlaufenen Teilprozessen, die in ihrem komplexen Zusammenwirken das Gesamtbild von Infektionskrankheiten auf Populationsebene ausmachen.

Grundaussagen über das qualitative Verhalten sind bereits unter Nutzung einfacher Endemie- bzw. Epidemiemodelle möglich.

Wichtige Phasen bzw. Prozesse bei Infektionskrankheiten sind

- Infektion,
- Latenz,
- temporäre oder permanente Manifestation,
- ggf. krankheitsbedingte Letalität,
- Konvaleszenz,
- ggf. Immunitätserwerb bzw. Immunisierung.

# Mathematische Beschreibung

Die Beschreibung der Ausbreitung von Infektionen kann mittels Differentialgleichungen zur Quantifizierung der o.g. Prozeßraten erfolgen.

Die Einbeziehung demographischer und sozialer Strukturen bzw. Prozesse wie

- räumliche Inhomogenität, Mobilität und Migration
  - Altersverteilung und Fertilität
  - soziale, ökonomische und kulturelle Gruppenbildung mit partieller Isolation
  - Hygienisches und medizinisches Niveau der Population
  - rationale und irrationale Reaktionen beim Auftreten von Epidemien
  - Flexibilität und Leistungsfähigkeit der gesamten Infrastruktur
- machen einfache Beschreibungen i.a. unmöglich.

Einfache Beschreibungen sind bspw. bei niedrigem Hygieneniveau und relativ homogener Abundanz in lokal begrenzten Populationen möglichst gleichmäßiger Durchmischung (wie bei der *Ebola-Zaire*-Epidemie im Ebolatal 1976) möglich.

# Ein einfaches lokales Epidemiemodell

Sei eine Population durch die folgenden Abundanzen beschrieben:

$\{N\}$  ... der Satz aller Abundanzen,

$N_S$  ... bisher nicht infizierte Individuen,

$N_I$  ... infizierte Individuen,

$N_T$  ... immunisierte Individuen,

$N_M$  ... manifest erkrankte Individuen,

$N_L$  ... letale Fälle,

$N_K$  ... konvaleszierte Individuen.

Weiterhin seien die

- Latenzzeiten von Infektion bzw. Immunisierung vernachlässigbar, i.e.
    - Infektion  $\Rightarrow$  verzögerungsfreie Manifestation,
    - Konvaleszenz/Immunisierung  $\Rightarrow$  verzögerungsfreie Immunität,
  - Immunität nach Erwerb permanent,
  - Migrationsprozesse zu vernachlässigen
- und trete die Infektion lokal begrenzt mit der Anfangsdichte  $N_M(t_0)$  auf,

so lässt sich eine Epidemie mit einem einfachen System gewöhnlicher Differentialgleichungen beschreiben. Man vereinbart:

$$\frac{dN_S}{dt} = -r_I \cdot N_S \cdot (N_I + N_M) - r_T \cdot N_S + q_S(\{N\}, \dots) - q_{LS}(\{N\}, \dots) \quad (\text{suszeptible})$$

$$\frac{dN_T}{dt} = +r_T \cdot N_S - q_{LT}(\{N\}, \dots) \cdot N_I \quad (\text{immunisiert})$$

$$\frac{dN_I}{dt} = r_I \cdot N_S \cdot (N_I + N_M) - q_{LI}(\{N\}, \dots) - r_M \cdot N_I \quad (\text{infiziert/latent})$$

$$\frac{dN_M}{dt} = r_M \cdot N_I - r_K \cdot N_M - r_L \cdot N_M - q_{LM}(\{N\}) \quad (\text{manifest krank})$$

$$\frac{dN_L}{dt} = r_L \cdot N_M \quad (\text{lethal})$$

$$\frac{dN_K}{dt} = r_K \cdot N_M - q_{LK}(\{N\}, \dots) \quad (\text{geheilt und immun})$$

Dabei sind die Abundanzen in der Population wie oben bereits definiert:

- $\{N\}$  ... Satz aller Abundanzen
- $N_I$  ... infizierte Individuen,
- $N_T$  ... immunisierte Individuen,
- $N_M$  ... manifest erkrankte Individuen,
- $N_L$  ... letale Fälle,
- $N_K$  ... konvaleszierte Individuen.

und die spezifischen (sp) bzw. absoluten (a) Raten

- $r_I$  ... sp. Infektionsrate der Übertragung von  $N_M$  zu  $N_S$
- $r_T$  ... sp. Immunisierungsrate (Vakzine, Gammaglobuline,..)
- $r_K$  ... sp. Konvaleszenzrate (Genesung mit Immunitätserwerb)
- $r_L$  ... sp. Letalität der Erkrankung
- $q_S$  ... a. Wachstumsrate durch Vermehrung der gesunden Population
- $q_K$  .. a. Sterberate durch normalen Tod der gesunden Population

Wird durch die Krankheit keine Immunität erworben, setzt man

$$N_S^* = N_S + N_I,$$

dann sind konvaleszierte Individuen unmittelbar nach der Genesung einem erneuten Infektionsrisiko ausgesetzt.

Häufig wird bei Infektion/Befall durch Parasiten (Pilze, Protozoen usw.) auch nach Ausheilung keine Immunität erworben.

Für diese Infektionen sind dann sogenannte Ping-Pong Verläufe typisch. (z. B. ein Partner krank, ein Partner gesund u. u.).

# Modellübung

Die Modellübungen erfolgen mit geschätzten Parametern für den Ebola-Virus nach Angaben über den Verlauf im Jahre 1976.

Anhand verschiedener Populationsgrößen, möglichen Protektionsmaßnahmen, Parametrisierungen können unterschiedlichste Epidemieverläufe generiert werden.