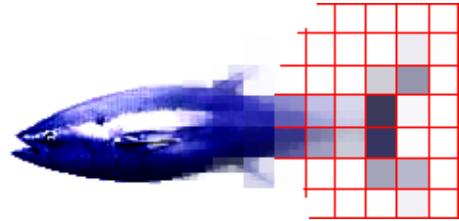


Carl von Ossietzky
Universität Oldenburg

Studiengang Diplom - Mathematik



Diplomarbeit

Modellierung unter Unsicherheit: Qualitative Differentialgleichungen in der Bioökonomik

vorgelegt von
Klaus Eisenack

Betreuender Gutachter: Prof. Dr. W. Ebenhöh
Zweiter Gutachter: Prof. Dr. U. Kamps

Oldenburg, den 28. Februar 2001.

Vorwort

Diese Diplomarbeit entstand im Drittmittelprojekt DIWA am Institut für Chemie und Biologie des Meeres. Dadurch konnte ich in einem angenehmen Arbeitsumfeld mathematische Methoden in den transdisziplinären Bereich des integrierten Küstenzonenmanagements einbringen. Ebenso hervorzuheben ist die Unterstützung durch das Institut für VWL I, was die Einbindung der ökonomischen Aspekte erleichterte.

Motivierend war für mich vor allem die Gelegenheit, wichtige Enden meines eher breit angelegten Studiums zu verweben. So finden sich neben dem mathematischen Schwerpunkt der Arbeit auch ökonomische und philosophische Gesichtspunkte. Mein Interesse gilt hier insbesondere der Grenzüberschreitung zwischen der natur- und sozialwissenschaftlichen Perspektive mit mathematischen Methoden. Das erklärt auch die Wahl der Fischerei als Modellierungsthema, obwohl ich Fisch eigentlich nicht mag. Es ermöglichte mir nicht nur mein persönliches Interesse für Umweltfragen einzubringen, sondern stellt auch ein ideales Beispiel für die Wechselwirkung zwischen Anthro- und Biosphäre dar. Menschliches Handeln wirkt hier stark verändernd auf die biologische Umwelt, die das Handeln wiederum wesentlich mitbestimmt.

Eine kurze Bemerkung will ich an die Wale richten. Sie mögen mir verzeihen, dass ich sie gelegentlich mit Fischen „in einen Topf“ werfe. Die Strukturähnlichkeiten des Wal- und Fischfangs machen diese biologisch sicherlich wichtige Unterscheidung für den Gegenstand der Arbeit unbedeutend. Einen literarischen Gewährsmann für meine oberflächliche Gleichsetzung kann ich immerhin angeben (Melville 1851):

[...] unter Verzicht auf jede Debatte stelle ich mich auf den altmodisch bewährten Standpunkt, daß der Wal ein Fisch ist, und berufe mich auf den frommen Jona als Eideshelfer. [...] *Der Wal ist ein Sprühstrahlen ausspritzender Fisch mit waagerechtem Schwanz.*

Danken möchte ich meinem Betreuer Prof. Dr. Wolfgang Ebenhöf, der mir bei der Bearbeitung des Themas viele Freiheiten gelassen hat. Ebenso danke ich meinem Zweitgutachter Prof. Dr. Udo Kamps. Für die vielen anregenden Diskussionen und ihre Unterstützung danke ich insbesondere Prof. Dr. Heinz Welsch und Dr. Jürgen Kropp.

Mein persönlicher Dank gilt vor allem meinen Eltern und meiner Großmutter, die mir das Studium ermöglicht und nie gedrängelt haben. Nicht unerwähnt bleiben sollen auch diverse Diskussionspartnerinnen und -partner, sowie die guten Freunde und Freundinnen, Leidtragende der Endphase meines Studiums, die mich immer wieder motiviert und mir schließlich auch bei den Korrekturarbeiten geholfen haben.

Klaus Eisenack

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	6
1 Einleitung	9
1.1 Modellierung mit qualitativen Differentialgleichungen	9
1.2 Fragestellungen und Gliederung	10
2 Grundlagen Qualitativer Differentialgleichungen	13
2.1 Abstraktion angemessener Funktionen	15
2.1.1 Angemessene Funktionen	15
2.1.2 Abstraktion der Bildmenge	15
2.1.3 Abstraktion von Funktionen	16
2.1.4 Der allgemeine Verhaltensraum	20
2.2 Strukturelle Abstraktion gewöhnlicher Differentialgleichungen	23
2.2.1 Qualitative Differentialgleichungen	23
2.2.2 Vollständigkeit und Korrektheit von qualitativen Lösungsmengen .	25
2.2.3 Vollständigkeit struktureller Abstraktionen	26
2.2.4 Elementare strukturelle Abstraktionen	28
3 Bioökonomische Probleme und Modelle	33
3.1 Der Begriff der Bioökonomik	33
3.2 Problembeschreibung	34
3.2.1 Übernutzung	35
3.2.2 Überkapazitäten	37
3.3 Bioökonomische Modelle	40
3.3.1 Typische Modellstruktur	40
3.3.2 Ein einfaches Fischereimodell	44
3.3.3 Modelle zur Überkapitalisierung	46
3.4 Modellkritik	50
4 Modellierung unter Unsicherheit	53
4.1 Zielsetzungen in der mathematischen Modellbildung	53
4.2 Der Begriff der Unsicherheit	55
4.3 Konsequenzen für die Modellbildung in der Bioökonomik	56

5	Ein Modell myopischer Ressourcennutzung	59
5.1	Voraussetzungen des Modells	60
5.1.1	Problembeschreibung und Ziele des Modells	60
5.1.2	Auswahl der Methoden	60
5.1.3	Modellannahmen	61
5.2	Mathematische Analyse	64
5.2.1	Dynamische Optimierung	65
5.2.2	Die optimale Fang- und Investitionsentscheidung	69
5.2.3	Die myopische Fangentscheidung	75
5.3	Das qualitative Modell	76
5.3.1	Abstraktion der Bildbereiche	76
5.3.2	Strukturelle Abstraktion	78
5.3.3	Grenz- und Anfangszustände	82
5.3.4	Die Lösungsmenge und ihre Reduktion	85
5.4	Ergebnisse	87
5.4.1	Merkmale des Systemverhaltens	89
5.4.2	Vergleich mit Modellen ohne Kapitalbestand	90
5.4.3	Rekonstruktion einer Fallstudie	91
5.4.4	Management-Optionen	94
6	Zusammenfassung und Ausblick	99
	Literaturverzeichnis	103
	Index	109

Symbolverzeichnis

$C^1(I)$	Stetig differenzierbare Funktionen auf I
DGL	Gewöhnliche Differentialgleichung
MSY	Maximale nachhaltige Ernte (<i>maximum sustainable yield</i>)
\mathbb{R}_+	Nicht-negative reelle Zahlen
$\bar{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$
QDGL	Qualitative Differentialgleichung

Qualitative Differentialgleichungen

\times_J	Kartesisches Produkt über Indexmenge J
\prod_S	Projektion auf Teilraum S
\ominus	Vorzeichennegation
\odot	Vorzeichenmultiplikation
a_L, a_S	Abstraktionsfunktion zu L bzw. S
A_S	Abstraktionsoperator zum Zustandsraum S
add	Vorzeichenaddition
ADD	Qualitative Addition
$B(S)$	Verhaltensraum zu S
C, \tilde{C}	Quantitative, Qualitative Beschränkungen
C_r^1	Raum der angemessenen Funktionen
D/DT	Qualitative Ableitung
\tilde{f}	Qualifizierung der Funktion f
F	Abstraktion der Funktion f
f'	Ableitung von f
$K(f)$	kritische Punkte von f
\hat{K}	Konvolutionsraum
l_j	Grenzmarke
L	Menge von Grenzmarken
\hat{L}	Qualitativer Bildbereich
\mathcal{L}	Lösungsmenge einer DGL
$\tilde{\mathcal{L}}$	Lösungsmenge einer QDGL
$M(f)$	Markstellen von f
M^+, M^-	Positive, negative qualitative Monotonie
MULT	Qualitative Multiplikation
qdir	Qualitative Richtung
qmag	Qualitative Größe
qval	Qualitativer Wert

S	Qualitativer Zustandsraum
\mathcal{S}	Menge der Vorzeichen
sgn	(Qualitatives) Vorzeichen
$\text{Suc}_S^I(s)$	Nachfolger des qualitativen Intervallzustandes s
$\text{Suc}_S^P(s)$	Nachfolger des qualitativen Punktzustandes s
T	Menge der Sprungstellen

Bioökonomische Modelle und Dynamische Optimierung

c^E	Erntekostenfunktion
c^I	Investitionskostenfunktion
$C_\pi^1(J, M)$	Stückweise stetig differenzierbare Funktionen von J nach M
f_0	Integrand eines Zielfunktional
f_1, \dots, f_n	Rechte Seite einer DGL
f_x	$\frac{\partial}{\partial x} f(x, \dots)$
f_{xy}	$\frac{\partial^2}{\partial xy} f(x, \dots)$
\tilde{f}	Transformierte der Funktion f
\hat{f}, \hat{x}	Erweitertes System
F	Regenerationsfunktion der nachwachsenden Ressource
h	Erntemenge
H	Hamilton-Funktional
I	Investitionen
J	Zeitintervall, Planungsintervall
K	Kapital
N	Anzahl der Unternehmen
p	Marktpreis
Q	Natürliche Kapazität der Ressource
r	Diskontrate
T	Zeithorizont
u	Steuerung
u^*	Optimale Steuerung
\mathcal{U}	Steuerungsbereich
x	Bestand der nachwachsenden Ressource, Lösung
\dot{x}	$\frac{d}{dt} x$
x^*	Optimale Funktion x
X	Abstraktion der Funktion x
\mathcal{X}	Zustandsraum
x_{MSY}	Bestand der Ressource, bei dem MSY möglich ist
δ	Abschreibungsrate
$\lambda, \lambda_0, \dots, \lambda_n$	Adjungierte Funktionen
π	kurzfristige Gewinnfunktion
Π	Gesamtgewinn zum Gegenwartswert, Zielfunktional

Kapitel 1

Einleitung

Fürwahr, keine leichte Aufgabe. Nichts Geringeres versuche ich damit, als Ordnung in die Bestandteile ein Chaos zu bringen. Hört an, was die besten und neuesten Autoritäten darüber wissen.

Herman Melville, Moby Dick

Diese Arbeit behandelt die Theorie der qualitativen Differentialgleichungen und ihre Anwendbarkeit in bioökonomischen Modellen. Der Gegenstandsbereich der Modellierung ist durch die weltweite Bedrohung mariner Ressourcen aufgrund deren Übernutzung motiviert. So ist bereits ein großer Teil der bekannten Fischbestände nahezu ausgebeutet (Garcia and Newton 1997; FAO 1998). Dies hat insbesondere drei Konsequenzen:

1. Die Einkommen in der Fischerei-Wirtschaft sinken.
2. Eine wichtige Nahrungsquelle für die steigende Weltbevölkerung wird reduziert.
3. Die Biodiversität in den Meeren und Ozeanen ist stark bedroht.

In diesem Zusammenhang wird zunehmend auf steigende Überkapazitäten in der Fischerei-Industrie hingewiesen. Sie senken einerseits die ökonomische Effizienz und intensivieren andererseits die Übernutzung (Mace 1996). Politik und Behörden versuchen daher mit unterschiedlichem Erfolg Steuerungs-Instrumente einzusetzen (z.B. die Senkung der EU-Fangquoten vor Grönland von 25.360 t auf 1.636 t im Jahr 2001; ?? 2000). Da das Problem der Übernutzung insbesondere durch eine unsichere Wissenslage über Daten und Zusammenhänge gekennzeichnet ist, soll es unter Verwendung qualitativer Differentialgleichungen analysiert werden.

1.1 Modellierung mit qualitativen Differentialgleichungen

Mit der Untersuchung der oben angedeuteten Probleme und möglichen Lösungsansätzen hierzu ist die Bioökonomik befasst, die hierzu mathematische Modelle formuliert. Die Folgen von Überkapazitäten auf die Dynamik der Ressourcennutzung wurden bislang jedoch

nur wenig untersucht (Munro 1999). Auch bei dynamischen bioökonomischen Modellen werden meistens nur ihre Gleichgewichtszustände untersucht. Weiterhin besteht das Problem der unsicheren Wissenslage, denn quantitative Daten und funktionale Zusammenhänge sind oft nicht mit der gewünschten Exaktheit bekannt. Die bisher in der bioökonomischen Forschung verwendeten Methoden berücksichtigen die Unvollständigkeit der für die Modelle benötigten Informationen nicht, obwohl auf deren Bedeutung schon früh hingewiesen wurde (Gordon 1954; Pindyck 1984). Unsicherheit ist jedoch ein typisches Problem für mathematische Modelle in der transdisziplinär angelegten Umweltsystemanalyse (Schellhuber and Kropp 1998; Kropp 1999). Wenn diese erfordern, dass Parameter oder funktionale Zusammenhänge numerisch exakt spezifiziert werden, ist es schwierig, valide Ergebnisse zu gewinnen. Besteht jedoch ein dringender politischer Handlungsbedarf, der meist Ausgangspunkt derartiger Forschungsbemühungen ist, kann sich die Wissenschaft nicht mit der Begründung zurückziehen, dass zu wenig gesicherte Erkenntnisse vorliegen. Es ist auch fraglich, ob der Ruf nach mehr und besseren Daten zwangsläufig zu besseren Modell-Ergebnissen führt (Johannes 1998). Komplexere, integrierte Modelle werden nicht notwendig übersichtlicher, und Simulationsläufe führen zu großen Datenmengen. Es sollte jedoch nicht das Ziel der Modellierung sein, viele Zahlen zu produzieren, sondern tiefer gehende Erkenntnisse zu gewinnen (Welsch 1995).

Qualitative Differentialgleichungen scheinen in diesem Kontext ein viel versprechender Ansatz zu sein (Brajnik and Lines 1998; Petschel-Held et al. 1999; Eisenack and Kropp 2001; Petschel-Held and Lüdeke 2001). Bei dieser Methode handelt es sich um eine Diskretisierung gewöhnlicher Differentialgleichungen mit dem Zweck, alle Lösungen einer strukturierter Menge von Differentialgleichungen zu erfassen. Die Diskretisierung erfolgt anhand der Monotonieeigenschaften der beteiligten Funktionen und einer Partitionierung der Bildbereiche in eine endliche Anzahl von Gebieten (Kuipers 1994). Dabei gehen zwar Informationen verloren, dafür können aber vollständige, endliche Lösungsmengen gewonnen werden, ohne dass numerische Approximationen notwendig sind. Daher ist der angedeutete Informationsverlust bei einer unsicheren Wissenslage nicht eine Schwäche, sondern eine Stärke der Methode, weil weniger Informationen benötigt werden, um ein Modell berechnen zu können.

1.2 Fragestellungen und Gliederung

Neben der mathematischen Darstellung der Theorie der qualitativen Differentialgleichungen wird in dieser Arbeit an der Fortentwicklung bioökonomischer Modelle gearbeitet. Im Einzelnen sollen folgende Fragestellungen geklärt werden:

- Mathematische Formulierung der Theorie qualitativer Differentialgleichungen. Das zentrale Vollständigkeitstheorem soll bewiesen, und eine Charakterisierung der auftretenden Lösungsräume entwickelt werden.
- Bestimmung des Begriffs der Unsicherheit und seiner Bedeutung für die Erstellung mathematischer Modelle, insbesondere in der Bioökonomik.

- Analyse der Anwendbarkeit qualitativer Differentialgleichungen in der mathematischen Modellierung.
- Entwicklung eines Modells zur Untersuchung der Übernutzung mariner Ressourcen unter besonderer Berücksichtigung von Überkapazitäten. Seine Dynamik soll analysiert und mit einfacheren Modellen sowie einem empirischen Fall verglichen werden. Mögliche Management-Optionen werden abgeleitet.

Die Arbeit gliedert sich in folgende Abschnitte:

In Kapitel 2 wird die Theorie der qualitativen Differentialgleichungen vorgestellt. Neben dem grundlegenden Raum der angemessenen Funktionen und dem Begriff der strukturellen Abstraktion, werden einige neue Konzepte definiert und wichtige Aussagen bewiesen.

In Kapitel 3 erfolgt eine ausführliche Problembeschreibung der Übernutzung mariner Ressourcen. Hierzu werden bestehende Modelle referiert und die benötigte ökonomische Terminologie erläutert.

Da sich Unsicherheit als wichtiger Aspekt des Übernutzungsproblems erweist, wird in Kapitel 4 näher untersucht, welche Konsequenzen sich daraus für die Modellierung, insbesondere für die Auswahl der Methoden, ergeben. Hierfür ist es notwendig, den Begriff des mathematischen Modells besser zu verstehen. Es ergibt sich eine Strukturierung des Modellierungsprozesses, die im Weiteren maßgeblich ist.

In Kapitel 5 wird das bis dahin Erarbeitete verwendet, um ein neues Modell der Ressourcennutzung zu entwickeln. Der Ansatz geht vom Problem der Übernutzung durch Überkapazitäten und der Kurzsichtigkeit mancher Entscheidungen in der Fischerei-Wirtschaft aus (Entscheidungen, die nur vom aktuellen Systemzustand abhängen und daher keine langfristige Perspektive haben, werden als „myopisch“ bezeichnet). Es stellt eine Erweiterung der zuvor referierten Modelle dar, und verwendet wie diese die Methode der dynamischen Optimierung, die eingehend erläutert wird. Aufgrund der unsicheren Wissenslage wird das Modell in eine qualitative Differentialgleichung transformiert, so dass die in Kapitel 2 vorgestellte Theorie verwendet werden kann. Das Modell wird mit dem von B. Kuipers und Mitarbeitern entwickelten Softwarepaket QSIM gelöst und tiefer gehendes Systemwissen abgeleitet.

Kapitel 6 fasst schließlich die Ergebnisse der Arbeit zusammen. Es werden Perspektiven für Erweiterungen des erstellten Modells und zur Weiterentwicklung der Theorie qualitativer Differentialgleichungen gegeben.

Kapitel 2

Grundlagen Qualitativer Differentialgleichungen

[...] wurden die Merkzeichen, die bewimpelten Pfähle, erwähnt, mit denen Jäger ihre vorübergehend verlassene Beute kenntlich machen;

Herman Melville, Moby Dick

Die Theorie der qualitativen Differentialgleichungen (QDGL) entstand Mitte der 80er Jahre als Teilgebiet der künstlichen Intelligenz für medizinische Anwendungen (Kuipers 1984). Die erste umfassende Darstellung, unabhängig vom medizinischen Kontext, legte Kuipers (1994) vor. Zur Lösung qualitativer Differentialgleichungen wurde das Softwarepaket QSIM von B. Kuipers und Mitarbeitern an der University of Texas entwickelt. Es erlaubt die Formulierung von QDGL in der Programmiersprache LISP und wird in Kapitel 5 zur Berechnung der Ergebnisse des Modells myopischer Ressourcennutzung verwendet. Inzwischen gibt es eine Reihe von Weiterentwicklungen, etwa zur Darstellung von Lösungsmengen, Zerlegung von QDGL, Anwendung von temporalen Logiken, sowie die Einbindung von quantitativen Zusammenhängen in das Konzept (Clancy and Kuipers 1993; Mallory et al. 1996; Tokuda 1996; Clancy 1997; Berleant and Kuipers 1998). Da diese Entwicklungsbestrebungen überwiegend im Bereich der künstlichen Intelligenz erfolgten, wurde die Theorie bislang nicht mit mathematischer Strenge formuliert. Daher werden einige theoretische Probleme der Theorie, etwa hinsichtlich der möglichen Lösungsräume, nicht mit der gewünschten Klarheit deutlich. Shults (1996) schlägt daher eine Neuformulierung vor, die bislang nur ansatzweise ausgeführt wurde. Daher werden in diesem Kapitel einige spezielle Probleme aufgegriffen, wobei Überlegungen von Shults und Struss (1990) berücksichtigt werden. Ansonsten bleibt die Arbeit von Kuipers (1994) maßgeblich, die Formulierungen werden an einigen Stellen jedoch verändert und vor allem ergänzt.

Zur Erläuterung der Zielrichtung der Theorie qualitativer Differentialgleichungen ist es zweckmäßig, von gewöhnlichen Differentialgleichungen auszugehen. Es sei angenommen, dass eine Differentialgleichung in expliziter Form gegeben ist. Von dieser verlangt man

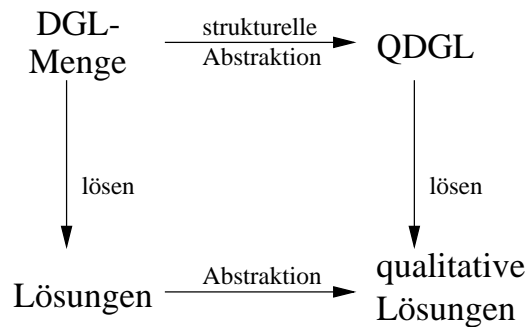


Abbildung 2.1: Zielrichtung der Theorie qualitativer Differentialgleichungen

jedoch nur bestimmte Eigenschaften. So könnte sie etwa durch eine streng monoton steigende Funktion definiert sein, ohne dass die Funktion konkret vorgegeben ist. In diesem Fall hat man es genau genommen also nicht mit *einer* Differentialgleichung zu tun, sondern mit einer *strukturierten Menge von Differentialgleichungen*. Schließlich erhält man mit jeder Funktion, die die Eigenschaften erfüllt, eine Gleichung. Die Menge aller Lösungen aller Differentialgleichungen der Menge kann jedoch nur im günstigsten Fall analytisch bestimmt werden.

Es sei angenommen, dass die Lösungsmenge einer strukturierten Menge von Differentialgleichungen gegeben ist. Dann verdeutlicht sich die Grundidee der Theorie in Abb. 2.1. Es wird ein sog. Abstraktionsoperator eingeführt, der jeder Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichungen eine Folge mit Gliedern aus einer endlichen Menge zuordnet (ein sog. Verhalten). Diese beschreibt insbesondere die Monotonieeigenschaften der Funktion. Die dadurch entstehende Menge „qualitativer Lösungen“ soll nun auf praktikable Weise gewonnen werden, ohne die „quantitativen Lösungen“ im einzelnen zu kennen. Dies erfolgt, indem aus der Menge der Differentialgleichungen durch sog. strukturelle Abstraktion eine qualitative Differentialgleichung gewonnen wird, die sich mit finiten Verfahren lösen lässt.

In Abschnitt 2.1 wird zunächst der Begriff der Abstraktion einer Funktion zu einem Verhalten präzisiert, wozu auch deren Bildbereich abstrahiert wird. Diese Untersuchung endet mit dem Strukturtheorem, welches die Menge der Verhalten charakterisiert. Damit lassen sich in Abschnitt 2.2 QDGL und ihre Lösungen definieren. Diese werden im Hinblick auf Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen untersucht, was zum Begriff der vollständigen strukturellen Abstraktion führt. Damit kann das für die Theorie zentrale Vollständigkeitstheorem gezeigt werden. Dem schließen sich noch einige Hilfsmittel zur Anwendung der Theorie an.

Da die Begriffe der Theorie bislang überwiegend in Englisch definiert wurden, sind die Originalbezeichnungen im folgenden zusätzlich *kursiv* wiedergegeben.

2.1 Abstraktion angemessener Funktionen

2.1.1 Angemessene Funktionen

Da mit qualitativen Differentialgleichungen Aussagen über gewöhnliche Differentialgleichungen gemacht werden, ist es notwendig, die für Lösungen in Betracht kommenden Funktionenräume zu betrachten. Die Theorie der QDGL wird für den im folgenden definierten Raum der angemessenen Funktionen aufgestellt (Kuipers 1994). Die Gründe hierfür werden spätestens in Proposition 2.3 deutlich.

DEFINITION 2.1: Es sei eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, $f \in C^1[a, b]$ auf einem abgeschlossenen, nach unten beschränkten Intervall $[a, b] \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ gegeben. Sie werde auch dann als stetig in b aufgefasst, wenn $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \pm\infty$ gilt. Dann heißt

$$K(f) := \partial\{x \in [a, b] \mid f'(x) = 0\}$$

die Menge der **kritischen Punkte** (*critical points*) von f , wobei ∂M den Rand der Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ bezeichnet. Die Funktion $f \in C^1[a, b]$ heißt **angemessen** (*reasonable*), wenn die Menge der kritischen Punkte $K(f)$ diskret ist. Der Raum dieser Funktionen werde mit $C_r^1[a, b]$ bezeichnet.

Es sei darauf hingewiesen, dass der Begriff des kritischen Punktes hier von der üblichen Verwendung in der Analysis abweicht. Die Stetigkeit der ersten Ableitung wird gefordert, da später das Vorzeichen der Ableitung betrachtet wird, um Monotonie-Eigenschaften untersuchen zu können. Die Forderung nach einer diskreten Menge kritischer Punkte spielt eine wichtige Rolle, wenn der Definitionsbereich der Funktion diskretisiert wird. Dieser kann damit in eine höchstens abzählbare Menge von Intervallen zerlegt werden, in denen die Steigung der Funktion jeweils ein gleich bleibendes Vorzeichen hat. Dies zeigt die folgende Proposition, derzufolge in kritischen Punkten Extrem- bzw. Sattelpunkte vorliegen, oder die Funktion zwischen aufeinander folgenden kritischen Punkten konstant ist.

PROPOSITION 2.1: Es seien t und t' benachbarte kritische Punkte der angemessenen Funktion f in dem Sinne, dass $t < t'$ ist, und kein $\tau \in (t, t')$ existiert, welches ebenfalls kritischer Punkt von f ist. Dann ist f auf (t, t') entweder streng monoton steigend oder streng monoton fallend oder konstant.

BEWEIS: Nach Voraussetzung gibt es im Intervall (t, t') keinen kritischen Punkt. Nach Def. 2.1 ist dies nur möglich, wenn f auf dem ganzen Intervall konstant ist oder die Ableitung f' nirgends verschwindet. Im zweiten Fall wechselt f' nach dem Zwischenwertsatz auf dem betrachteten Intervall das Vorzeichen nicht, da diese Funktion stetig ist. Das heißt aber nichts anderes, als dass f entweder streng monoton steigt oder fällt. ■

2.1.2 Abstraktion der Bildmenge

Eine angemessene Funktion soll durch eine Folge mit Gliedern aus einer endlichen Menge abstrahiert werden, deren Elemente Punkte aus \mathbb{R} bzw. die offenen Intervalle dazwischen sind. Die genauen Stellen dieser Punkte sind für die Theorie der QDGL (mit Ausnahme von

$-\infty, 0$ und ∞) jedoch nicht von Belang. Dieser Grundgedanke der Abstraktion wird nun schrittweise entwickelt und erweitert. Zunächst zur Definition der Grenzmarken (Kuipers 1994):

DEFINITION 2.2: Es sei eine endliche Menge $L := \{l_1, \dots, l_n\}$ mit $l_i \in \bar{\mathbb{R}}$ für $i = 1, \dots, n$ und $\{-\infty, 0, \infty\} \subseteq L$ gegeben. Ferner sei angenommen, dass die Menge mit aufsteigenden Indices (bzgl. der üblichen Ordnung auf $\bar{\mathbb{R}}$) geordnet ist. Dann heißen die Elemente von L **Grenzmarken** (*landmarks*) und L folglich **Menge von Grenzmarken**.

Mit den Grenzmarken wird eine weitere Menge gebildet:

DEFINITION 2.3: Es sei $L = \{l_1, \dots, l_n\}$ eine endliche Menge mit Elementen aus $\bar{\mathbb{R}}$, die mit aufsteigenden Indices geordnet ist. Dann ist

$$\hat{L} := L \cup \{(l_j, l_{j+1}) \mid 1 \leq j \leq n-1\}.$$

Ist L eine Menge von Grenzmarken, heißt \hat{L} **qualitativer Bildbereich**. Man sagt auch, \hat{L} ist durch L **erzeugt**.

BEISPIEL: Ein im Folgenden wichtiger, und zugleich der einfachste qualitative Bildbereich, ist der **Konfluenzraum** $\hat{\mathcal{K}} = \{-\infty, (-\infty, 0), 0, (0, \infty), \infty\}$, der durch die Menge der Grenzmarken $\mathcal{K} = \{-\infty, 0, \infty\}$ erzeugt wird. Die Elemente $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$ werden auch mit „-“ und „+“ bezeichnet (Kleer and Brown 1984).

Ein qualitativer Bildbereich \hat{L} ist durch

$$\begin{aligned} (l_j, l_{j+1}) &\leq (l_k, l_{k+1}) && \text{falls } l_j \leq l_k, \\ l_j &\leq (l_k, l_{k+1}) && \text{falls } l_j \leq l_k, \\ (l_j, l_{j+1}) &\leq l_k && \text{falls } l_{j+1} \leq l_k, \end{aligned} \tag{2.1}$$

vollständig geordnet. Wenn L eine Menge von Grenzmarken ist, ist \hat{L} eine disjunkte Zerlegung von $\bar{\mathbb{R}}$, jedem $x \in \bar{\mathbb{R}}$ kann also ein Element aus \hat{L} zugeordnet werden. Diese Zuordnung nimmt die folgende ordnungserhaltende Abbildung vor:

DEFINITION 2.4: Es sei $L = \{l_1, \dots, l_n\}$ eine endliche Menge mit Elementen aus $\bar{\mathbb{R}}$, die mit aufsteigenden Indices geordnet ist. Dann heißt die Funktion

$$a_L : \bar{\mathbb{R}} \rightarrow \hat{L} \\ x \mapsto \begin{cases} l_j, & \text{falls } x = l_j, \\ (l_j, l_{j+1}), & \text{falls } x \in (l_j, l_{j+1}). \end{cases}$$

Abstraktionsfunktion zu L .

2.1.3 Abstraktion von Funktionen

Da nun Bildbereiche abstrahiert werden können, wendet sich die Betrachtung im Folgenden angemessenen Funktionen zu. Deren Abstraktion ist möglich, da Abstraktionsfunktionen

einen sog. Abstraktionsoperator vom Raum der angemessenen Funktionen in einen gewissen Folgenraum induzieren. Es ist das Ziel dieses Abschnittes, den genannten Operator zu konstruieren. Soweit möglich, werden die Vorarbeiten für den eindimensionalen Fall durchgeführt, um dann auf den mehrdimensionalen Fall überzugehen.

In diesem Abschnitt wird erstmals entscheidend davon Gebrauch gemacht werden, dass angemessene Funktionen stetig differenzierbar sind. Da letztlich Eigenschaften von Differentialgleichungen untersucht werden sollen, werden nicht nur Funktionen, sondern auch ihre Ableitungen abstrahiert. Dies wird erreicht, indem ein gegebener qualitativer Bildbereich mit Hilfe des Konfluenzraumes erweitert wird, um das Vorzeichen der Ableitung festzuhalten (Kuipers 1994).

DEFINITION 2.5: Die Menge $S := \hat{L} \times \hat{K}$ mit einem qualitativen Bildbereich \hat{L} heißt **qualitativer Zustandsraum**. Seine Elemente heißen **qualitative Zustände** (*qualitative states*). Auf das Adjektiv „qualitativ“ wird verzichtet, wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind.

Es ist eine nahe liegende Idee zur Konstruktion des Abstraktionsoperators, einer angemessenen Funktion f bei gegebenem qualitativen Zustandsraum S eine Funktion

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \bar{\mathbb{R}} &\rightarrow S, \\ t &\mapsto \tilde{f}(t) = [a_L f(t), a_K f'(t)] \end{aligned}$$

zuzuordnen. Die Theorie der QDGL diskretisiert jedoch auch den Definitionsbereich von f . Die endliche Zerlegung des Bildbereiches und die Stetigkeitseigenschaften von f bringen es mit sich, dass \tilde{f} auf ganzen Intervalle aus $[a, b]$ konstant wäre. Daher lassen sich diese Intervalle und ihre Randpunkte als distinkte Zustände auffassen. Da die Menge der kritischen Punkte einer angemessenen Funktion höchstens abzählbar ist, erhält man daraus eine Folge, die die Funktion diskretisiert. Der qualitative Zustand ändert sich, wenn f den Wert einer Grenzmarke annimmt oder einen kritischen Punkt erreicht.

DEFINITION 2.6: Es sei eine angemessene Funktion $f : [a, b] \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ und der qualitative Bildbereich \hat{L} gegeben. Dann heißt

$$M(f) := \partial\{x \in [a, b] \mid f(x) \in L\} \cup \{a, b\}$$

die Menge der **Markstellen** von f bezüglich \hat{L} .

Die Vereinigung $T := K(f) \cup M(f)$ heißt dann Menge der **Sprungstellen** von f bezüglich \hat{L} .

Mit folgender Proposition kann später gezeigt werden, dass die Abstraktion einer angemessenen Funktion eine Folge liefert (Kuipers 1994).

PROPOSITION 2.2: Die Menge der Sprungstellen T einer angemessenen Funktion f bezüglich des qualitativen Bildbereiches \hat{L} ist endlich oder abzählbar.

BEWEIS: Aus der Definition angemessener Funktionen (Def. 2.1) folgt, dass f auf kompakten Intervallen nur endlich viele kritische Punkte hat. Da sich \mathbb{R} als abzählbare Vereinigung kompakter Intervalle darstellen lässt, hat f daher höchstens abzählbar viele kritische Punkte, die nach Def. 2.6 Elemente von T sind.

Prop. 2.1 besagt, dass angemessene Funktionen zwischen benachbarten kritischen Punkten t und t' konstant oder streng monoton sind. Markstellen können jedoch nur im Fall der strengen Monotonie in (t, t') liegen. Da L endlich ist, sind dies aufgrund der Monotonie höchstens endlich viele.

Daher kann T höchstens abzählbar sein. ■

Mit der Menge der Sprungstellen lässt sich folgende Abbildung definieren, die zur Beschreibung des Abstraktionsoperator wesentlich ist. Da auch T durch die Relation (2.1) vollständig geordnet ist, sei diese Menge mit aufsteigenden Indices sortiert.

DEFINITION 2.7: Die **Qualifizierung** einer angemessenen Funktion $f \in C_r^1[a, b]$ mit dem qualitativen Zustandsraum $S := \hat{L} \times \hat{K}$ und der Menge der Sprungstellen $T = \{t_0, t_1, \dots, t_k, \dots\}$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \hat{T} &\rightarrow S, \\ t_k &\mapsto [a_L f(t_k), a_K f'(t_k)], \\ (t_k, t_{k+1}) &\mapsto [a_L f(\tau), a_K f'(\tau)] \quad \text{mit } \tau \in (t_k, t_{k+1}). \end{aligned}$$

Für diese Definition ist Folgendes zu zeigen:

PROPOSITION 2.3: Die Qualifizierung \tilde{f} einer angemessenen Funktion f ist wohldefiniert.

BEWEIS: Es ist zu zeigen, dass $\tilde{f}(t_k, t_{k+1})$ unabhängig von der Wahl $\tau \in (t_k, t_{k+1})$ ist.

Nach dem Beweis von Prop. 2.2 ist f auf dem Intervall (t_k, t_{k+1}) streng monoton oder konstant. Daher ändert sich $a_K f'$ dort nicht.

Würde $a_L f$ an einer Stelle im Intervall den Wert ändern, so müsste er dort nach dem Zwischenwertsatz auf einer Grenzmarke liegen. Das wäre aber ein Widerspruch zur Annahme, dass t_k und t_{k+1} aufeinander folgende Sprungstellen sind (vgl. Def. 2.6). Damit ist $[a_L f, a_K f']$ auf (t_k, t_{k+1}) konstant. ■

Nun werden die vorstehenden Begriffe auf den mehrdimensionalen Fall verallgemeinert.

DEFINITION 2.8: Eine Funktion $f = [f_1, \dots, f_n] : [a, b] \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^n$, $[a, b] \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ heißt **angemessen**, wenn jede ihrer Komponenten f_i angemessen ist. Jede Komponente sei mit einem qualitativen Bildbereich $S_i = \hat{L}_i \times \hat{K}_i$ versehen. Daher gibt es jeweils eine Menge von Sprungstellen T_i . Die Menge $S = \times_{i=1, \dots, n} S_i$ heißt **qualitativer Zustandsraum**, und $T = \cup_{i=1, \dots, n} T_i$ ist die Menge der **Sprungstellen** von f . Die Abbildung

$$\begin{aligned} a_S : \bar{\mathbb{R}}^{2n} &\rightarrow S \\ [x_1, \dots, x_{2n}] &\mapsto [a_{L_1} x_1, a_{K_1} x_2, \dots, a_{L_n} x_{2n-1}, a_{K_n} x_{2n}] \end{aligned}$$

heißt **Abstraktionsfunktion**.

Später werden folgende Vereinbarungen benötigt (Kuipers 1994):

DEFINITION 2.9: Für den qualitativen Zustand $s \in S$ sei $\text{qval}_i(s) := \Pi_{S_i}(s)$ der **qualitative Wert** (*qualitative Value*) einer Komponente i . Die **qualitative Größe** (*qualitative magnitude*) ist $\text{qmag}_i(s) := \Pi_{L_i}(s)$ bzw. $\text{qmag}(s) := [\text{qmag}_1(s), \dots, \text{qmag}_n(s)]$. Ferner ist $\text{qdir}_i(s) := \Pi_{\mathcal{K}}(\text{qval}_i(s))$ bzw. $\text{qdir}(s) := [\text{qdir}_1(s), \dots, \text{qdir}_n(s)]$ dessen **qualitative Richtung** (*qualitative direction*). Dabei bezeichnet Π die Projektion auf den jeweils angegebenen Teilraum. Das **qualitative Vorzeichen** ist

$$\text{sgn}_i(s) := \begin{cases} + & \text{falls } \text{qmag}_i(s) > 0, \\ 0 & \text{falls } \text{qmag}_i(s) = 0, \\ - & \text{falls } \text{qmag}_i(s) < 0. \end{cases}$$

Die Menge der Sprungstellen T ist auch im mehrdimensionalen Fall durch die Relation (2.1) vollständig geordnet und höchstens abzählbar. Damit lässt sich Def. 2.7 auf diesen Fall übertragen.

DEFINITION 2.10: Es sei eine angemessene Funktion $f = [f_1, \dots, f_n] : [a, b] \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^n$ mit dem qualitativen Zustandsraum S und den Sprungstellen $T = \{t_0, t_1, \dots, t_k, \dots\}$ gegeben. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \hat{T} &\rightarrow S, \\ t_k &\mapsto a_S(f_1(t_k), f'_1(t_k), \dots, f_n(t_k), f'_n(t_k)) \\ (t_k, t_{k+1}) &\mapsto a_S(f_1(\tau), f'_1(\tau), \dots, f_n(\tau), f'_n(\tau)) \\ &\text{mit } \tau \in (t_k, t_{k+1}). \end{aligned}$$

die **Qualifizierung** von f .

Auch hier ist die Qualifizierung wohldefiniert, da für alle $i = 1, \dots, n$ ein Intervall $(t_i, t'_i) \in T_i$ existiert, so dass $(t_k, t_{k+1}) \subseteq (t_i, t'_i)$ ist. In diesen Intervallen ist die jeweilige Komponente von \tilde{f} nach Prop. 2.3 wohldefiniert, also gilt dies auf (t_i, t'_i) für alle Komponenten. Nach diesen Vorbereitungen ist nun die angestrebte Definition möglich.

DEFINITION 2.11: Der **Abstraktionsoperator**

$$\begin{aligned} A_S : C_r^1[a, b] &\rightarrow S^{\mathbb{N}}, \\ f &\mapsto F := (\tilde{f}(\hat{T})), \end{aligned}$$

ordnet bei gegebenem Zustandsraum S einer angemessenen Funktion f ihre **Abstraktion** F zu. Dabei ist T die zugehörige, geordnete und höchstens abzählbare Menge der Sprungstellen, und F ist als (evtl. abbrechende) Folge aufzufassen. Die geradzahigen Glieder von F heißen **Punktzustände**, die ungeradzahigen **Intervallzustände**.

BEISPIEL: Betrachte die angemessene Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R}^2, \\ t &\mapsto \begin{bmatrix} f_0 e^{-rt} \\ -f_0 r e^{-rt} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

mit $f_0, r \in \mathbb{R}_+$. Diese Funktion soll nun bezüglich der Grenzmarken

$$\begin{aligned} L_1 &:= \{-\infty, 0, \lambda, \infty\} \\ L_2 &:= \mathcal{K} \end{aligned}$$

mit $0 < \lambda < \infty \in \mathbb{R}$ abstrahiert werden. Der qualitative Zustandsraum ist dann $S = \hat{L}_1 \times \hat{\mathcal{K}} \times \hat{L}_2 \times \hat{\mathcal{K}}$. Nimmt man zusätzlich $\lambda = f_0$ an, erhält man die Sprungstellen $T = \{0, \infty\}$. Damit ist

$$F = A_S(f) = \left(\begin{array}{c} [\lambda, -] \\ [-, +] \end{array}, \begin{array}{c} [(0, \lambda), -] \\ [-, +] \end{array}, \begin{array}{c} [0, 0] \\ [0, 0] \end{array} \right) \quad (2.3)$$

die Abstraktion von f bezüglich S .

2.1.4 Der allgemeine Verhaltensraum

Im Weiteren lässt sich die Frage stellen, welche Folgen als Abstraktionen angemessener Funktionen überhaupt auftreten können. Es geht also um die Struktur des Raumes $A_S(C_r^1) \subseteq S^{\mathbb{N}}$:

DEFINITION 2.12: Die Menge $B(S) := A_S(C_r^1)$ heißt **Verhaltensraum** bezüglich des qualitativen Zustandsraumes S ; jede Folge $F \in B(S)$ heißt **Verhalten** (*behavior*).

Jedes Verhalten besteht also aus einer Folge von qualitativen Zuständen, die die Abstraktion einer angemessenen Funktion ist. Der Verhaltensraum lässt sich mit dem folgenden Theorem charakterisieren (Kuipers 1994):

THEOREM über die Struktur des Verhaltensraumes (Strukturtheorem): Die Folge $F = (F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sei die Abstraktion einer angemessenen Funktion f bzgl. des Zustandsraumes S . Dann hat F die folgenden Eigenschaften für alle $j \in \mathbb{N}$:

$$F_{2j+1} \in \text{Suc}_S^P(F_{2j}) \quad \text{und} \quad F_{2j} \in \text{Suc}_S^I(F_{2j-1}), \quad (2.4)$$

$$F_{2j-1} \neq F_{2j} \vee F_{2j} \neq F_{2j+1}. \quad (2.5)$$

Dabei sind die Mengen Suc_S^I und Suc_S^P wie folgt definiert:

DEFINITION 2.13: Für qualitative Zustände $s = [s_1, \dots, s_n]$ und $u = [u_1, \dots, u_n]$, sowie Grenzmarken $l_0 < l_1 < l_2$ ist $u \in \text{Suc}_S^P(s)$ der **Punkt-Nachfolger** (*P-successor*) von s , wenn für alle $i = 1, \dots, n$ gilt:

$$\begin{aligned} s_i = [l_1, 0] &\Rightarrow u_i \in \{[l_1, 0], [(l_1, l_2), +], [(l_0, l_1), -]\}, \\ s_i = [l_1, +] &\Rightarrow u_i = [(l_1, l_2), +], \\ s_i = [l_1, -] &\Rightarrow u_i = [(l_0, l_1), -], \\ s_i = [(l_0, l_1), +] &\Rightarrow u_i = s_i, \\ s_i = [(l_1, l_2), -] &\Rightarrow u_i = s_i, \\ s_i = [(l_0, l_1), 0] &\Rightarrow u_i \in \{[(l_0, l_1), -], [(l_0, l_1), 0], [(l_0, l_1), +]\}. \end{aligned}$$

Hingegen ist $u \in \text{Suc}_S^I(s)$ der **Intervall-Nachfolger** (*I-successor*) von s , wenn gilt:

$$\begin{aligned} s_i = [l_1, 0] &\Rightarrow u_i = s_i \\ s_i = [(l_0, l_1), 0] &\Rightarrow u_i = s_i, \\ s_i = [(l_0, l_1), +] &\Rightarrow u_i \in \{[l_1, 0], [l_1, +], [(l_0, l_1), 0], [(l_0, l_1), +]\} \\ s_i = [(l_0, l_1), -] &\Rightarrow u_i \in \{[l_0, 0], [l_0, -], [(l_0, l_1), 0], [(l_0, l_1), -]\} \end{aligned}$$

Hierbei handelt es sich um die Menge der möglichen Folgezustände nach einem Punkt- bzw. Intervallzustand. In der Definition von $Suc_S^I(s)$ tauchen nicht alle kombinatorisch möglichen qualitativen Zustände auf, da einige als Intervallzustände nicht auftreten können. Dies wird der Beweis des Strukturtheorems zeigen. Die Definition resultiert ansonsten aus den Stetigkeitseigenschaften der angemessenen Funktionen und dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

BEWEIS: Der Beweis zeigt der Reihe nach die Eigenschaften (2.4) und (2.5). Die Sprungstellenmenge der Abstraktion F sei T , und $t, t' \in T$ bezeichnen die Sprungstellen, bei denen $F_{2j} = \tilde{f}(t)$ bzw. $F_{2j+2} = \tilde{f}(t')$ gilt.

1. Zuerst werden Punktzustände und ihre möglichen Folgezustände betrachtet. Hierzu werden die folgenden Fälle 1.1 bis 1.3 untersucht. Es sei $s = F_{2j}$, und $u = F_{2j+1}$.

1.1 Es gelte $qmag_i(s) = (l_0, l_1)$, dann ist $f(t) \in (l_0, l_1)$, liegt also in einem offenen Intervall. Da f stetig ist, gibt es eine Umgebung $U(t)$, so dass $f(U(t)) \subset (l_0, l_1)$ ist. Daher gilt dann auch $qmag_i(u) = (l_0, l_1)$.

1.2 Ist $qdir_i(s) = +$, so ist $f'(t) > 0$. Mit dem Mittelwertsatz existiert dann ein $\epsilon > 0$, so dass auch $f'(t + \epsilon) > 0$ ist. Infolgedessen ist mit Prop. 2.1 $qdir_i(u) = +$. Die Argumentation für $qdir_i(s) = -$ ist analog.

1.3 Es sei $qdir_i(s) = 0$, d.h. $f'(t) = 0$. Dann kann $qdir_i(u)$ jedes Vorzeichen annehmen. Falls $qdir_i(u) = 0$ ist, ist f aufgrund der Stetigkeit auf (t, t') konstant, es muss also $qmag_i(s) = qmag_i(u)$ sein.

Ist $qdir_i(u) = +$ und $qmag_i(s) = l_1$, so gibt es nach dem Mittelwertsatz ein $\epsilon > 0$ mit $l_1 < f(t + \epsilon) < l_2$, und folglich ist dann $qmag_i(u) = (l_1, l_2)$.

Für $qdir_i(u) = -$ ist vollkommen analog $qmag_i(u) = (l_0, l_1)$.

Da hiermit alle Möglichkeiten für einen Punktzustand abgedeckt sind, ist der erste Teil der Eigenschaft (2.4) gezeigt.

2. Nun werden die Nachfolger von Intervallzuständen untersucht. Es sei $s = F_{2j+1}$, und $u = F_{2j+2}$. Aus dem vorhergehenden Teil des Beweises ergibt sich, dass Intervallzustände nur dann nicht intervallwertig sind, wenn sie konstant sind. Damit sind nur folgende Fälle zu betrachten:

2.1 Ist f auf (t, t') konstant, gilt also $qdir_i(s) = 0$, so muss aufgrund der Stetigkeit von f auch $qdir_i(u) = 0$ gelten.

2.2 Für $qdir_i(s) = +$, steigt f streng monoton auf (t, t') . Die Sprungstelle t' kann ein kritischer Punkt oder eine Markstelle sein. Im ersten Fall ist $f'(t') = 0$, es gilt also $qdir_i(u) = 0$. Im zweiten Fall kann aufgrund der Monotonie und der Stetigkeit von f nur $f(t') = l_1$ sein, womit $qmag_i(u) = l_1$ ist. Natürlich können diese beiden Fälle auch gleichzeitig auftreten.

2.3 Der Fall $qval_i(s) = [(l_0, l_1), -]$ ist analog zu 2.2.

Der zweite Teil der Eigenschaft (2.4) ist also auch gezeigt.

3. Es ist zu zeigen, dass $s \neq u \vee u \neq v$ ist, wobei $s = F_{2j-1}$, $u = F_{2j}$, und $v = F_{2j+1}$ sei. An der Stelle t kann ein kritischer Punkt oder eine Markstelle liegen.

3.1 Wenn t ein kritischer Punkt ist, gilt $\text{qdir}_i(u) = 0$. Da f' stetig ist und t nach Def. 2.1 am Rand der Menge $\{x \in [a, b] \mid f'(x) = 0\}$ liegen muss, existiert ein $\epsilon > 0$, so dass

$$\forall \tau \in (t, t + \epsilon) : f'(\tau) \neq 0, \\ \text{oder } \forall \tau \in (t - \epsilon, t) : f'(\tau) \neq 0$$

gilt. Daher ist $\text{qdir}_i(s) \neq \text{qdir}_i(u)$ oder $\text{qdir}_i(u) \neq \text{qdir}_i(v)$.

3.2 Ist t dagegen eine Markstelle, so kann aufgrund der Stetigkeit von f und Def. 2.6 mit dem selben Argument wie in Beweisschritt 3.1 der Wert von f nicht in einer ganzen Umgebung von t gleich bleiben, es ist also $\text{qmag}_i(s) \neq \text{qmag}_i(u)$ oder $\text{qmag}_i(u) \neq \text{qmag}_i(v)$.

Aus den Beweisschritten 3.1 und 3.2 folgt also Eigenschaft (2.5). Damit ist das Strukturtheorem bewiesen. ■

Wenn zusätzlich die folgende Vermutung gelten würde, wäre der Verhaltensraum vollständig charakterisiert:

VERMUTUNG: Wenn F eine Folge aus S mit den Eigenschaften (2.4) und (2.5) ist, dann ist sie bereits ein Verhalten.

Hierzu wäre zu zeigen, dass jede Folge, die den Bedingungen des Strukturtheorems genügt, die Abstraktion einer angemessenen Funktion ist. Dass heißt genauer, dass es (wenigstens) eine angemessene Funktion f gibt, für die $A_S(f) = F$ ist. Der Beweis könnte erfolgen, indem aus den Sprungstellen T Stützstellen konstruiert werden, denn dort nimmt f bzw. f' einen bekannten Wert an. In einem weiteren Schritt könnte man eine Interpolierende durch die Stützstellen wählen, die angemessen ist, und deren Monotonieeigenschaften gerade so sind, dass ihre Abstraktion wieder F liefert. Dies könnte mit Splines möglich sein.

Der Gewinn des Strukturtheorems liegt zum einen im Nutzen für die Implementation eines Algorithmus zur Lösung qualitativer Differentialgleichungen. Mit Hilfe der Mengen Suc_S^d und Suc_S^p kann die Menge der Zustände, die auf einen gegebenen Zustand folgen können, stark eingeschränkt werden. Dies ist im Softwarepaket QSIM implementiert, welches in Kapitel 5 zur Lösung von QDGL verwendet wird.

Zum anderen ist das Strukturtheorem der Ausgangspunkt für einen Perspektivwechsel: Bisher wurde von einer konkret gegebenen Funktion und bekannten Grenzmarken ausgegangen, deren qualitative Eigenschaften mit einer Folge beschrieben werden. Genauso gut kann man nun Grenzmarken (bis auf ihre Ordnung) unbestimmt lassen (d.h. ihnen keine Werte aus $\bar{\mathbb{R}}$ zuweisen), womit bereits ein Verhaltensraum definiert ist. Weitere Untersuchungen müssen sich nicht mehr mit reellen Werten auseinandersetzen, sondern können sich auf die gewonnene diskrete Betrachtungsweise konzentrieren. In Kapitel 4 ist dies ein wichtiges Argument für die Verwendung qualitativer Differentialgleichung zur Modellierung unter Unsicherheit.

2.2 Strukturelle Abstraktion gewöhnlicher Differentialgleichungen

Bisher beschränkte sich die Darstellung auf die Abstraktion von Funktionen. Ziel der Untersuchung ist jedoch die Behandlung von Differentialgleichungen. In diesem Abschnitt soll daher expliziert werden, wie gewöhnliche Differentialgleichungen in sinnvoller Weise und unter Berücksichtigung des bisherigen Instrumentariums abstrahiert werden können. Hierzu wird der Begriff der qualitativen Differentialgleichung und deren Lösung eingeführt. Dann wird durch die Begriffe der Vollständigkeit und Korrektheit von qualitativen Verfahren der Bezug zu gewöhnlichen Differentialgleichungen hergestellt. Hieraus ergeben sich Anforderungen, die das Konzept der strukturellen Abstraktion motivieren.

2.2.1 Qualitative Differentialgleichungen

Zur Definition einer qualitativen Differentialgleichung wird ein Zustandsraum benötigt, auf dem eine Menge von Relationen gegeben ist, die die Struktur des zu modellierenden Problems abbilden (Kuipers 1994).

DEFINITION 2.14: Eine **Qualitative Differentialgleichung** (QDGL) ist ein Paar (S, \tilde{C}) , bestehend aus einem qualitativen Zustandsraum S und einer endlichen Menge von **Beschränkungen** (*constraints*) $\tilde{C} = \{\tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_m\}$, $\tilde{C}_i \subseteq S$ für alle $i = 1, \dots, m$.

Wenn Verwechslungen zu befürchten sind, wird auch von qualitativen Relationen - im Gegensatz zu quantitativen - die Rede sein. Es sei angemerkt, dass von Beschränkungen nicht verlangt wird, dass sie Relationen gleicher Stelligkeit sind. Ein qualitativer Zustand s erfüllt die Beschränkung \tilde{C}_i , wenn $s \in \tilde{C}_i$ ist. Damit kann nun formuliert werden, was unter der Lösung einer QDGL zu verstehen ist. Aufgrund des Strukturtheorems ist es nahe liegend, diejenigen Elemente von $B(S)$ zu betrachten, die alle Beschränkungen erfüllen.

DEFINITION 2.15: Eine Folge $F \in B(S)$ heißt **Lösung** der QDGL (S, \tilde{C}) , wenn für alle $j \in \mathbb{N}$ und alle $i = 1, \dots, m$ gilt, dass $F_j \in \tilde{C}_i$. Die Menge aller Lösungen einer gegebenen QDGL wird mit $\tilde{\mathcal{L}}(S, \tilde{C})$ bezeichnet, oder einfach mit $\tilde{\mathcal{L}}$, wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind.

Die vorstehende Definition lässt sich folgendermaßen interpretieren: Gesucht sind Folgen, die Abstraktion einer angemessenen Funktion sind, und an jeder Stelle alle Beschränkungen erfüllen. Das heißt noch nicht notwendig, dass jede Lösung der QDGL die strukturelle Abstraktion einer angemessenen Lösung einer geeigneten DGL ist. Mit dieser Definition wird eine QDGL zu einem endlichen Beschränkungs-Erfüllungs-Problem, welches zwar NP-hart ist, für dessen Lösung aber viele Algorithmen vorliegen (Mackworth 1977; Mackworth 1987).

DEFINITION 2.16: Ein **Beschränkungs-Erfüllungs-Problem** (*constraint satisfaction problem*) ist gegeben durch eine Menge von n Variablen $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ und einer Menge von n zugehörigen endlichen Wertemengen $D = \{D_1, \dots, D_n\}$. Außerdem sei eine Menge von m Relationen zwischen den Variablen gegeben, die

als Teilmengen des kartesischen Produkts der Wertemengen $S = \times_{i=1, \dots, n} D_i$ aufgefasst werden. Die Lösungsmenge ist die größte Teilmenge von S , in der jedes n -Tupel alle gegebenen Relationen erfüllt.

Aufgrund von Def. 2.15 und dem Strukturtheorem wird bei Wahl eines Lösungsraums $B(S)$ das „dynamische“ Problem (Lösen gewöhnlicher Differentialgleichungen) auf ein „statisches“ zurückgeführt: Es ist lediglich notwendig, Relationen auf dem Zustandsraum zu betrachten und nicht die im Strukturtheorem angegebenen möglichen Folgezustände. Zwei qualitative Differentialgleichungen haben die gleichen Lösungen, wenn sie gleiche Zustandsräume und äquivalente Beschränkungen haben.

BEISPIEL: Es sei der qualitative Zustandsraum $S = \hat{L}_1 \times \hat{K} \times \hat{L}_2 \times \hat{K}$ gegeben (vgl. Beispiel auf Seite 19), sowie folgende Beschränkungen auf S :

$$\tilde{C}_1 := \{s \in S \mid \text{sgn}_2(s) = \text{qdir}_1(s)\},$$

$$\tilde{C}_2 := \{s \in S \mid \text{sgn}_2(s) = -\text{sgn}_1(s)\},$$

$$\tilde{C}_3 := \{s \in S \mid \text{qdir}_2(s) = \text{sgn}_1(s)\}.$$

Dann ist

$$(S, \{\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3\}) \quad (2.6)$$

eine QDGL. Nun soll deren Lösungsmenge bestimmt werden. Zunächst wird die „statische“ Seite betrachtet, d.h. es wird untersucht, welche qualitativen Zustände $s \in S$ alle Beschränkungen erfüllen. Dies gilt für alle Zustände aus der Schnittmenge $\tilde{C} := \tilde{C}_1 \cap \tilde{C}_2 \cap \tilde{C}_3$, die in diesem Fall einfach zu bestimmen ist. Es gilt

$$s \in \tilde{C} \Leftrightarrow \text{qdir}_1(s) = \text{sgn}_2(s) = -\text{sgn}_1(s) = -\text{qdir}_2(s).$$

Damit ist

$$\tilde{C} = \left\{ \begin{bmatrix} -\infty, + \\ +, - \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (-\infty, 0), + \\ +, - \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (0, \lambda), - \\ -, + \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda, - \\ -, + \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (\lambda, \infty), - \\ -, + \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \infty, - \\ -, + \end{bmatrix} \right\}$$

die Menge aller Zustände, die in einer Lösung vorkommen können. Der Einfachheit halber seien sie mit s_1, \dots, s_7 bezeichnet. Man beachte, dass hier Zustände mit $\text{qdir}_i(s) = \pm\infty$ nicht aufgeführt wurden, da dies bei angemessenen Funktionen nur am Rand des Definitionsbereiches auftreten kann.

Zur Bestimmung der Lösungsmenge der QDGL muss man sich nun der „dynamischen“ Seite zuwenden, d.h. alle Folgen aus $B(S)$ mit Gliedern in \tilde{C} finden. Das Strukturtheorem gibt Auskunft darüber, welche Zustände als Punkt- bzw. Intervallzustände auftreten können, und welche Zustände mögliche Nachfolger sind. Dies ist in folgender Tabelle aufgeführt:

Punktzustand s	$Suc_S^P(s)$	Intervallzustand s	$Suc_S^I(s)$
s_1	s_2	s_2	s_2, s_3
s_2	s_2	s_4	s_4, s_5
s_3	s_4	s_5	s_5
s_4	s_4	s_6	s_5, s_6
s_5	s_5		
s_6	s_5		
s_7	s_6		

Berücksichtigt man, dass Punkt- und Intervallzustände nach dem Strukturtheorem abwechseln müssen und es nicht möglich ist, dass auf einen Intervallzustand zwei mal der gleiche Zustand folgt, sind insbesondere folgende Lösungen möglich:

$$\begin{array}{ll}
 \tilde{\mathcal{L}}_1 = (s_5, s_5, s_5), & \tilde{\mathcal{L}}_2 = (s_6, s_6, s_6), \\
 \tilde{\mathcal{L}}_3 = (s_6, s_6, s_5, s_5, s_5), & \tilde{\mathcal{L}}_4 = (s_7, s_6, s_6), \\
 \tilde{\mathcal{L}}_5 = (s_7, s_6, s_5, s_5, s_5), & \tilde{\mathcal{L}}_6 = (s_4, s_4, s_4), \\
 \tilde{\mathcal{L}}_7 = (s_4, s_4, s_5, s_5, s_5), & \tilde{\mathcal{L}}_8 = (s_3, s_4, s_4), \\
 \tilde{\mathcal{L}}_9 = (s_3, s_4, s_5, s_5, s_5), & \tilde{\mathcal{L}}_{10} = (s_2, s_2, s_2), \\
 \tilde{\mathcal{L}}_{11} = (s_2, s_2, s_3, s_4, s_4), & \tilde{\mathcal{L}}_{12} = (s_2, s_2, s_3, s_4, s_5, s_5, s_5), \\
 \tilde{\mathcal{L}}_{13} = (s_1, s_2, s_3, s_4, s_4), & \tilde{\mathcal{L}}_{14} = (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_5, s_5).
 \end{array}$$

Hinzu kommen noch weitere Lösungen, wenn man jeweils Abschnitte auswählt, die mit einem Punktzustand beginnen. Insgesamt erhält man somit die Lösungsmenge $\tilde{\mathcal{L}}$ der aufgestellten QDGL.

2.2.2 Vollständigkeit und Korrektheit von qualitativen Lösungsmengen

Im Folgenden werden die Kriterien behandelt, nach denen die strukturelle Abstraktion einer Differentialgleichung erfolgen soll. Die Lösungsmenge einer DGL und einer QDGL können mit Hilfe eines Abstraktionsoperators folgendermaßen in Beziehung gesetzt werden (Struss 1990):

DEFINITION 2.17: Die Lösungsmenge $\tilde{\mathcal{L}}$ einer QDGL heißt **vollständig** bzgl. einer DGL und einem Abstraktionsoperator A_S , wenn für die Menge \mathcal{L} der angemessenen Lösungen der DGL gilt: $A_S(\mathcal{L}) \subseteq \tilde{\mathcal{L}}$. Sie heißt **korrekt**, wenn $\tilde{\mathcal{L}} \subseteq A_S(\mathcal{L})$ gilt.

Hiermit kann die folgende Fragestellung präzise aufgeworfen werden: Wie kann aus einer gegebenen DGL und einem gegebenen Abstraktionsoperator eine QDGL gewonnen werden, so dass deren Lösungsmenge vollständig bzw. korrekt bzgl. der DGL ist?

Ist die Lösungsmenge korrekt, aber nicht vollständig, so erhält man nur qualitative Lösungen, die Abstraktion von quantitativen Lösungen sind. Es werden aber nicht die Abstraktionen aller quantitativen Lösungen gefunden. Ist die Lösungsmenge dagegen vollständig, aber nicht korrekt, so erhält man Abstraktionen aller Lösungen der DGL, jedoch auch noch weitere Lösungen. Wünschenswert wäre also ein Verfahren, welches sowohl vollständig als auch korrekt ist. Hierbei stößt man jedoch auf Schwierigkeiten, und es ist sogar anzunehmen, dass dies im Allgemeinen nicht möglich ist (Struss 1990). Ein Beweis hierzu steht jedoch noch aus (Kuipers 2000).

Soll der vorliegende Ansatz für konkrete Probleme verwendet werden, muss an dieser Stelle eine Entscheidung getroffen werden: Sollen vorrangig vollständige oder korrekte Lösungen gefunden werden? Die Theorie der qualitativen Differentialgleichung wurde für die erste Alternative entwickelt. In Kapitel 4 wird gezeigt, dass sich QDGL deswegen zur Modellierung unter Unsicherheit eignen. Zusätzlich bieten numerische Methoden bereits ein ausgereiftes Instrumentarium, um einzelne korrekte Lösungen einer DGL zu finden. Demgegenüber führt der Ansatz, mindestens alle Lösungsklassen zu gewinnen, zu hierzu komplementären Methoden. Der Preis dafür ist das Auftreten von Pseudoverhalten (Kuipers 1994).

DEFINITION 2.18: Eine Lösung einer QDGL heißt **Pseudoverhalten** (*spurious behavior*) bezüglich einer DGL und einem Abstraktionsoperator, wenn sie keine Abstraktion einer Lösung der DGL ist.

PROPOSITION 2.4: Es sei $\tilde{\mathcal{L}}$ eine vollständige, nicht korrekte, qualitative Lösungsmenge bzgl. einer DGL. Dann enthält $\tilde{\mathcal{L}}$ Pseudoverhalten.

Der Beweis dieser Proposition ist trivial.

2.2.3 Vollständigkeit struktureller Abstraktionen

Durch einen Abstraktionsoperator kann nicht nur zwischen den *Lösungen* von gewöhnlichen und qualitativen Differentialgleichungen, sondern auch zwischen den *Gleichungen* selbst ein Bezug hergestellt werden. Dies ist möglich, da auch eine DGL als - freilich nicht mehr endliches - Beschränkungs-Erfüllungs-Problems aufgefasst werden kann. Hierzu wählt man als Wertemengen D_i die Bildbereiche der auf der rechten Seite der Gleichung vorkommenden Funktionen. Aus der Gleichung werden (quantitative) Relationen gewonnen, die genau dann erfüllt sind, wenn alle jeweils auftretenden Variablen der Gleichung genügen. Um eine DGL so beschreiben zu können, werden die Ableitungen der Funktionen als zusätzliche Variablen eingeführt. Damit kann man eine DGL als Paar (E, C) beschreiben, wobei E das kartesische Produkt der Bildbereiche der Variablen, und C die Menge der abgeleiteten Relationen ist. Für Lösungen der DGL ergibt sich als notwendige Bedingung, dass sie für jeden Punkt im Definitionsbereich allen (quantitativen) Relationen genügen.

BEISPIEL: Ist etwa die DGL $x' = F(x)$ mit $x \in D_1 = \mathbb{R}$, $x' \in D_2 = \mathbb{R}$ gegeben, so definiert man $C = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid F(x) = y\}$. Dann gilt für jede Lösung x und für alle $t \in [a, b]$: $[x(t), x'(t)] \in C$.

Fasst man gewöhnliche und qualitative Differentialgleichungen als Beschränkungs-Erfüllungs-Problem auf, wird der Begriff der strukturellen Abstraktion folgendermaßen definiert (Kuipers 1994).

DEFINITION 2.19: Eine qualitative Beschränkung $\tilde{C}_i \subseteq S$ heißt **strukturelle Abstraktion** der Relation $C_i \subseteq \mathbb{R}^n$ bezüglich des qualitativen Zustandsraumes S , wenn mit der Abstraktionsfunktion a_S für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt: $x \in C_i \Rightarrow a_S(x) \in \tilde{C}_i$. Allgemeiner heißt eine QDGL (S, \tilde{C}) **strukturelle Abstraktion** einer DGL, wenn alle ihre qualitativen Beschränkungen strukturelle Abstraktionen der quantitativen Beschränkungen der DGL sind.

Aus dieser Definition resultiert das folgende zentrale Theorem (Kuipers 1994):

THEOREM **über die Vollständigkeit struktureller Abstraktionen (Vollständigkeitstheorem)**: Die Lösungsmenge einer strukturellen Abstraktion einer DGL ist vollständig.

BEWEIS: Gegeben sei eine DGL mit der Menge ihrer angemessenen Lösungen \mathcal{L} , sowie ein qualitativer Zustandsraum S . Damit ist der Abstraktionsoperator A_S gegeben. Ferner sei die QDGL (S, \tilde{C}) eine strukturelle Abstraktion der DGL bzgl. A_S , und $\tilde{\mathcal{L}}$ bezeichne die Menge ihrer Lösungen. Nach der Definition der Vollständigkeit (Def. 2.17) ist dann zu zeigen, dass $A_S(\mathcal{L}) \subseteq \tilde{\mathcal{L}}$.

Es sei also $f \in \mathcal{L}$ eine angemessene Lösung der DGL. Beschreibt man die DGL durch die quantitative Relation C , so gilt notwendigerweise $\forall t : [f(t), f'(t)] \in C$. Bezeichnet man die Abstraktion von f mit F , so gilt auch $\forall j : F_j \in \tilde{C}$, da \tilde{C} eine strukturelle Abstraktion von C ist. Zugleich gilt natürlich $F \in B(S)$. Damit erfüllt F also die beiden Bedingungen an eine Lösung der QDGL (S, \tilde{C}) (vgl. Def. 2.15), d.h. $F \in \tilde{\mathcal{L}}$.

Insgesamt ist also $A_S(\mathcal{L}) \subseteq \tilde{\mathcal{L}}$. ■

Das Verfahren zur Ermittlung vollständiger qualitativer Lösungsmengen lässt sich nun folgendermaßen zusammenfassen: Zuerst wird eine geeignete Menge von Grenzmarken gewählt, die den Zustandsraum und Abstraktionsoperator bestimmen. Sodann werden qualitative Beschränkungen aufgestellt, die strukturelle Abstraktionen der DGL sind. Der Zustandsraum, gemeinsam mit den Beschränkungen, stellt dann eine QDGL dar, die die gewünschte Vollständigkeitseigenschaft besitzt.

BEISPIEL: Man betrachte die QDGL (2.6) (siehe Beispiel auf S. 24) mit ihrer Lösungsmenge $\tilde{\mathcal{L}}$, sowie die DGL

$$\begin{aligned} \dot{f} &= -rf, \\ \ddot{f} &= r^2 f, \\ f(0) &= f_0 \in \mathbb{R}_+, \end{aligned} \tag{2.7}$$

mit $r \in \mathbb{R}_+$. Diese wird durch die Funktion

$$f(t) = \begin{bmatrix} f_0 e^{-rt} \\ -f_0 r e^{-rt} \end{bmatrix},$$

gelöst (vgl. (2.2) im Beispiel auf S. 19). Die Lösung wird bzgl. des Zustandsraumes S mit der Notation von S. 24 zu

$$F = A_S(f) = (s_3, s_4, s_5) \tag{2.8}$$

abstrahiert. Dieses Verhalten ist eine Lösung der QDGL, es ist also $F = A_S(f) \in \tilde{\mathcal{L}}$. Daher ist die QDGL (2.6) vollständig bezüglich der DGL (2.7). Die qualitativen Lösungen mit Ausnahme des Verhaltens (2.8) sind Pseudoverhalten. Bis auf die Lösungen $\tilde{\mathcal{L}}_8$ und $\tilde{\mathcal{L}}_9$ (sowie deren Abschnitte, die ebenfalls Lösungen sind) ist dies offensichtlich, da sie keinen „passenden“ Anfangszustand haben. Die Vollständigkeit der Lösungsmenge ist garantiert, da die qualitativen Beschränkungen $\{\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3\}$ eine strukturelle Abstraktion der quantitativen Relation

$$C = \{[f, \dot{f}, \ddot{f}] \mid \dot{f} = -rf \wedge \ddot{f} = r^2 f\}$$

sind, welche die Differentialgleichung (2.7) beschreibt.

Zunächst ist es kein Problem, strukturelle Abstraktionen einer DGL anzugeben, da lediglich notwendige Bedingungen abgeleitet werden müssen. Wenn aber die Menge der Pseudoverhalten möglichst klein sein soll, ist diese Aufgabe keineswegs trivial.

2.2.4 Elementare strukturelle Abstraktionen

In diesem Abschnitt werden beispielhaft strukturelle Abstraktionen elementarer Funktionen und Verknüpfungen aufgeführt. Dies sind insbesondere solche, die in Kapitel 5 benötigt werden und in QSIM implementiert sind. Um die strukturellen Abstraktionen bequem definieren zu können, ist es zweckmäßig, gewisse Operationen bzw. Relationen auf der Menge der Vorzeichen zu betrachten (Williams 1991).

DEFINITION 2.20: Die Menge der Vorzeichen werde mit $S := \{+, 0, -\}$ bezeichnet. Es seien $s, t, u \in S$. Auf dieser Menge werden die zweistellige Verknüpfung der **Vorzeichen-Multiplikation** \odot und die **Vorzeichen-Negation** \ominus durch folgende Tafeln definiert:

\odot	+	0	-
+	+	0	-
0	0	0	0
-	-	0	+

s	$\ominus s$
+	-
0	0
-	+

Außerdem ist auf S die dreistellige Relation $\text{add}(s, t, u)$ durch folgende Tafel erklärt. Sie wird als **Vorzeichen-Addition** bezeichnet, und ist erfüllt, wenn s einen Wert aus der ersten Spalte, t einen Wert aus der ersten Zeile, und u einen der zugehörigen Werte in der Tafel annimmt:

s / t	+	0	-
+	+	+	+, 0, -
0	+	0	-
-	+, 0, -	-	-

Das durch Def. 2.9 gegebene qualitative Vorzeichen eines Zustandes $\text{sgn}_i(s)$ wird nun als Abbildung in die Menge S aufgefasst. Das gleiche gilt für die qualitative Richtung $\text{qdir}_i(s)$. Damit können nun einige strukturelle Abstraktionen vorgestellt werden. Von großer Bedeutung ist die qualitative Ableitung (Kuipers 1994).

DEFINITION 2.21: Die **qualitative Ableitung** $D/DT(i, j)$ ist eine Relation auf dem qualitativen Zustandsraum S , die für $s \in S$ genau dann erfüllt ist, wenn $\text{qdir}_i(s) = \text{sgn}_j(s)$ gilt.

PROPOSITION 2.5: Die qualitative Relation $D/DT(i, j)$ auf dem qualitativen Zustandsraum S ist eine strukturelle Abstraktion der gewöhnlichen Differentialgleichung $x'_i = x_j$.

BEWEIS: Es sei X die Abstraktion einer Lösung x der DGL, und es gelte $x'_i = x_j$ auf $[a, b]$, d.h. $\forall t \in [a, b] : x'_i(t) = x_j(t)$. Also gilt auch $\forall t \in [a, b] : \text{sgn}(x'_i(t)) = \text{sgn}(x_j(t))$, woraus folgt, dass $\forall k \in \mathbb{N} : \text{qdir}_i(X_k) = \text{sgn}_j(X_k)$. Somit gilt also mit $C_{i,j} = \{(x_i, x_j) \in \mathbb{R}^2 \mid x'_i = x_j\}$ die Implikation $(x_i(t), x_j(t)) \in C_{i,j} \Rightarrow X_k \in D/DT(i, j)$. ■

In der Praxis arbeitet man meist nicht mit indizierten Variablen, sondern weist diesen eigene Bezeichner zu. In diesem Fall wird obige Relation und die noch folgenden auch nach dem Muster $D/DT(x, y)$ notiert, wenn x und y die Variablenbezeichner sind. Analog werden die Mengen der Grenzmarken dann mit L_x, L_y , usw. bezeichnet.

Ebenfalls sehr bedeutend ist die qualitative Monotonie (Kuipers 1994). Der zugehörige Beweis ist nicht komplizierter als der für die qualitative Ableitung und wird hier nicht ausgeführt.

DEFINITION 2.22: Die Relation $M^-(i, j) \subseteq S$ auf dem qualitativen Zustandsraum S heißt **negative qualitative Monotonie**, wenn für alle $s \in M^-(i, j)$ die Bedingung $qdir_i(s) = \ominus qdir_j(s)$ erfüllt ist. Analog ist $s \in M^+(i, j)$ genau dann, wenn $qdir_i(s) = qdir_j(s)$ gilt, was als **positive qualitative Monotonie** bezeichnet wird.

PROPOSITION 2.6: Die qualitative Relation $M^+(i, j)$ bzw. $M^-(i, j)$ auf dem qualitativen Zustandsraum S ist eine strukturelle Abstraktion der Gleichung $x_j = f(x_i)$ mit einer streng monoton steigenden bzw. fallenden, differenzierbaren, ansonsten aber beliebigen Funktion f .

Das Modell in Kapitel 5 benötigt auch die folgende Relation:

DEFINITION 2.23: Die Relation $U_{(l_1, l_2)}^-(i, j)$ ist durch folgende Bedingungen gegeben, in denen $s \in S$ ein qualitativer Zustand ist:

1. $qmag_i(s) < l_1 \Rightarrow s \in M^+(i, j)$
2. $qmag_i(s) > l_1 \Rightarrow s \in M^-(i, j)$
3. $qmag_i(s) = l_1 \Rightarrow qmag_j(s) = l_2$

Dies ist die strukturelle Abstraktion einer „U-Förmigen“ Funktion $f(x)$ die für $x < l_1$ streng monoton steigt, für $x > l_1$ streng monoton fällt, und bei $x = l_1$ den (maximalen) Wert l_2 annimmt. Außer funktionalen Zusammenhängen sind noch strukturelle Abstraktionen wichtiger Verknüpfungen zu erwähnen (Kuipers 1994).

DEFINITION 2.24: Die **qualitative Addition** $ADD(i, j, k)$ ist eine Relation auf dem qualitativen Zustandsraum S , die für $s \in S$ genau dann erfüllt ist, wenn sowohl

$$\text{add}(\text{sgn}_i(s), \text{sgn}_j(s), \text{sgn}_k(s))$$

also auch

$$\text{add}(qdir_i(s), qdir_j(s), qdir_k(s))$$

gilt.

PROPOSITION 2.7: Die qualitative Relation $ADD(i, j, k)$ ist eine strukturelle Abstraktion der Gleichung $x_i + x_j = x_k$.

DEFINITION 2.25: Die Relation $MULT(i, j, k) \subseteq S$ auf dem qualitativen Zustandsraum S heißt **qualitative Multiplikation**, wenn für alle $s \in MULT(i, j, k)$ sowohl die Bedingung

$$\text{sgn}_i(s) \odot \text{sgn}_j(s) = \text{sgn}_k(s),$$

also auch

$$\text{add}(\text{sgn}_i(s) \odot qdir_j(s), qdir_i(s) \odot \text{sgn}_j(s), qdir_k(s))$$

erfüllt ist.

PROPOSITION 2.8: Die qualitative Relation $\text{MULT}(i, j, k)$ ist eine strukturelle Abstraktion der Gleichung $x_i x_j = x_k$.

Der Beweise der letzten beiden Propositionen sollen hier weggelassen werden, da sie leicht einzusehen sind. Wichtig sind noch die erweiterten Varianten der oben genannten Relationen (Kuipers 1994). Um die Idee zu verdeutlichen, soll das Konzept der erweiterten qualitativen Monotonie gezeigt werden.

DEFINITION 2.26: Die **erweiterte positive qualitative Monotonie** wird mit $M^+(i, j)$ $[(l_{i,1}, l_{j,1}), \dots, (l_{i,m}, l_{j,m})]$ notiert. Mit den Grenzmarken $l_{i,1}, \dots, l_{i,m} \in L_i$ und $l_{j,1}, \dots, l_{j,m} \in L_j$ müssen für einen Zustand $s \in M^+(i, j)$ $[(l_{i,1}, l_{j,1}), \dots, (l_{i,m}, l_{j,m})]$ folgende Aussagen erfüllt sein:

1. $s \in M^+(i, j)$
2. $\forall k = 1, \dots, m : \text{qmag}_i(s) = l_{i,k} \Leftrightarrow \text{qmag}_j(s) = l_{j,k}$
3. $\forall k = 1, \dots, m : \text{qmag}_i(s) > l_{i,k} \Leftrightarrow \text{qmag}_j(s) > l_{j,k}$

Die Paare $(l_{i,1}, l_{j,1}), \dots, (l_{i,m}, l_{j,m})$ werden daher auch als **korrespondierende Werte** (*corresponding values*) bezeichnet.

PROPOSITION 2.9: Die erweiterte qualitative Monotonie $M^+(i, j)$ $[(l_{i,1}, l_{j,1}), \dots, (l_{i,m}, l_{j,m})]$ ist eine strukturelle Abstraktion der Gleichung $x_j = f(x_i)$ mit streng monoton steigender, differenzierbarer Funktion f , wobei für $k = 1, \dots, m$ zusätzlich $f(x_i) = l_{i,k} \Leftrightarrow x_j = l_{j,k}$ gilt.

BEWEIS: Die erste Aussage gilt bereits, da f als streng monoton steigend und differenzierbar angenommen wird. Die zweite folgt direkt aus der Gleichheitsannahme für f . Die dritte Aussage folgt aus beiden Annahmen gemeinsam mit der Tatsache, dass eine Abstraktionsfunktion ordnungserhaltend ist. ■

Analog wird die **erweiterte qualitative Addition** mit $\text{ADD}(i, j, k)$ $[(l_{i,1}, l_{j,1}, l_{k,1}), \dots, (l_{i,l}, l_{j,l}, l_{k,l})]$ bezeichnet. Von dieser wird zusätzlich zur „gewöhnlichen“ qualitativen Addition verlangt, dass die angegebenen Grenzmarken korrespondieren müssen und die daraus resultierenden Ungleichungen zutreffen. Ihre Definition und der Beweis erfordert eine größere Zahl an Fallunterscheidungen. Da dies zu wenig neuen Erkenntnisse führt, wird an dieser Stelle darauf verzichtet. Nach dem selben Muster lassen sich weitere erweiterte qualitative Relationen aufstellen. Sie ermöglichen es, nicht nur Aussagen über die Vorzeichen und das Monotonieverhalten der in Relation gesetzten Funktionen zu machen, sondern auch über die Größenverhältnisse wichtiger (qualitativer) Werte.

Zuletzt soll noch der Begriff der qualitativen Äquivalenz vorgestellt werden. Er kann als qualitative Beschränkung aufgefasst werden, dient aber auch zu anderen Untersuchungen. In Kapitel 5 wird er helfen, eine große qualitative Lösungsmenge zu strukturieren, indem Äquivalenzklassen gebildet werden.

DEFINITION 2.27: Zwei qualitative Zustände $s, s' \in S$ heißen **äquivalent**, wenn $\text{qmag}(s) = \text{qmag}(s')$ und $\text{qdir}(s) = \text{qdir}(s')$ ist. Zwei angemessene Funktionen f, g heißen **qualitativ äquivalent** bezüglich des qualitativen Wertebereichs S , wenn ihre Abstraktionen F und G gliedweise äquivalent sind.

Nachdem nun die Grundlagen qualitativer Differentialgleichungen geschlossen dargestellt wurden, werden QDGL in Kapitel 5 exemplarisch als Modellierungsmethode angewandt. Hierzu wird im folgenden Kapitel die zu modellierende bioökonomische Problemstellung dargelegt, und in Kapitel 4 ausführlich begründet, warum die Verwendung von QDGL in der Bioökonomik vorteilhaft ist, indem der Begriff der Unsicherheit präzisiert wird.

Kapitel 3

Bioökonomische Probleme und Modelle

[...] so scheint mit diesem Vergleich unwiderleglich dargetan, daß der vielgejagte Wal seiner baldigen Vernichtung wohl nicht mehr entrinnen kann.

Herman Melville, Moby Dick

Bevor in Kapitel 5 qualitative Differentialgleichungen als Modellierungswerkzeug angewandt werden können, ist es notwendig, den Gegenstandsbereich der Modellierungsbemühungen zu erläutern. Auf die allgemeine Bedeutung von Problembeschreibungen für mathematische Modelle wird in Kapitel 4 eingegangen. In diesem Kapitel wird zuerst der Begriff der Bioökonomik umrissen. Dann werden mit der Nutzung mariner, nachwachsender Ressourcen verbundene Probleme beschrieben und einer einfachen Analyse unterzogen. Insbesondere wird dabei die Bedeutung von Überkapazitäten für das Problem der Übernutzung im Zentrum der Aufmerksamkeit stehen. Die weltweit bedrohliche Lage vieler Fischbestände ist zugleich die Motivation für das später zu erstellende Modell myopischer Ressourcennutzung. Um den Stand der Forschung zu skizzieren, die dort bislang verwendeten mathematischen Methoden vorzustellen und Entwicklungsmöglichkeiten aufzuzeigen, werden im Weiteren bestehende bioökonomische Modelle vorgestellt. Zugleich erweist es sich an einigen Stellen als notwendig, ökonomische Begriffe einzuführen. Die Kritik der bestehenden Modelle zum Abschluss dieses Kapitels gibt wesentliche Impulse für die weitere Arbeit, insbesondere für die Verwendung qualitativer Differentialgleichungen.

3.1 Der Begriff der Bioökonomik

Der Ausdruck „Bioökonomik“ ist Clark (1981) zufolge eine Abkürzung für „Biologische Ressourcenökonomik“. Gegenstand dieser Disziplinen übergreifenden Wissenschaft ist die Wechselwirkung biologischer und ökonomischer Systeme. Diese Wechselwirkung ist überall dort von Bedeutung, wo Bedürfnisse der Menschen durch biologische Ressourcen befriedigt werden, die im Wirtschaftsprozess weiterverarbeitet und verteilt werden, etwa bei der Versorgung mit Nahrungsmitteln oder Kleidung.

Die mathematischen Modelle in dieser Arbeit beschäftigen sich vor allem mit einem Teilgebiet, nämlich der ökonomischen Nutzung mariner, nachwachsender biologischer Ressourcen, insbesondere Fischen und Walen. Ein Großteil der Ergebnisse lässt sich jedoch auch auf andere biologische Ressourcen übertragen (etwa auf Krustentiere, aber auch auf die Jagd in terrestrischen Ökosystemen). Wesentlich ist hier, dass sich die Ressource regeneriert (im Gegensatz etwa zu Bodenschätzen, die sich nicht bzw. nur auf sehr großen Zeitskalen regenerieren; zur Unterscheidung siehe etwa Ströbele 1987). Die folgenden Untersuchungen lassen sich also in die Ökonomik regenerierender Ressourcen einordnen.

3.2 Problembeschreibung

Die Probleme, die bei der Nutzung regenerierender, mariner Ressourcen auftreten, sind aktuell und von großer Bedeutung. Etwa zwei Drittel der Weltbevölkerung leben nicht weiter als 100 km von der Küste entfernt (El-Sabh et al. 1998). Die Meere dienen seit Menschengedenken als Nahrungsgrundlage und Einkommensquelle. Auch im neuen Jahrhundert wird sich dies in Folge der schnell zunehmenden Weltbevölkerung nicht ändern. Der Anteil von Fischereiprodukten an der Welternährung nimmt seit langem zu (FAO 1998), wobei ca. 19% des weltweiten Proteinverbrauchs durch Fischerei gedeckt werden (FAO 1993).

Auf der anderen Seite zeigt eine traurige Bilanz, dass weltweit fast 70% aller bekannten Fischbestände maximal ausgebeutet oder bedroht sind (Garcia and Newton 1997). In der Nordsee, einem der am intensivsten befischten Meere, werden jährlich ca. 30-40% der in Fischen gebundenen Biomasse entnommen. Dies hat zum fast vollständigen Verschwinden von Hering, Kabeljau und Makrele geführt (Ducrotoy et al. 2000). Als Reaktion werden häufig neue Bestände und Fanggründe erschlossen, um die Einkommen der Fischerei-Industrie zu sichern, obwohl die neuen Bestände aufwändigere Fangmethoden erfordern (Goñi 1998).

Beifang, der oft tot über Bord geworfen wird, trägt zusätzlich zum Rückgang der Bestände bei. Stark dezimierte Arten erholen sich nur langsam (so wird ein Erholungszeitraum von wenigstens 50 Jahre für den antarktischen Blauwal geschätzt (Clark 1985)). Da weitere ungenutzte Spezies mit den bewirtschafteten in Wechselwirkung stehen, sind die Biodiversität und die komplexen Wirkungsgefüge des Meeres bedroht (Ströbele and Wacker 1995). Zusätzlich ist eine Reihe von sozioökonomischen Konsequenzen zu beachten, etwa sinkende Einkommen in der Fischerei (Clark 1985). In Regionen, in denen Menschen stark auf Einkommen aus dem Verkauf ihres Fangs angewiesen sind, nehmen Arbeitslosigkeit und soziale Spannungen zu. Schätzungen zu Folge wurden 1986 bereits bis zu 44% der in der weltweiten Fischerei entstehenden Kosten aus Subventionen finanziert (Mace 1996). Die Vermutung liegt nahe, dass sich hier stark betroffene gesellschaftliche Gruppen gegen die bedrohlichen Folgen der zurückgehenden Bestände bzw. der teurer gewordenen Fangmethoden absichern.

Schon im 19. Jahrhundert war man sich des Problems der Übernutzung bewusst (Smith 1994). Die Nahrungsquelle Meer wurde jedoch noch im 18. Jahrhundert als unerschöpflich angesehen, so dass es nicht angemessen erschien, regulierende Maßnahmen zu ergreifen. Erst durch die zunehmende Industrialisierung gewann das Problem an Bedeutung (Gordon 1954; Wacker and Blank 1998). Historische Ereignisse wie der amerikanische Bürgerkrieg oder der 2. Weltkrieg führten jedoch zur Reduktion der Fangflotten bzw. zu Phasen, in denen

sich die Bestände wieder erholen konnten (Ströbele 1987). Erste ökonomische Analysen gehen auf Arbeiten von Gordon (1954) zurück, der insbesondere betrachtet, wie Bestands-erhaltung und Wirtschaftlichkeit in Einklang zu bringen sind.

Versuche, das Übernutzungsproblem zu regulieren, wurden - wenn überhaupt - mit verschiedenem Erfolg unternommen, etwa die Einrichtung der internationalen Walfangkommission (IWC) im Jahre 1946 oder der EU-200-Meilen-Zone (Clark 1990; Hatcher 1999). Die oben geschilderte Situation zeigt jedoch, dass die Versuche des Fischerei-Managements nicht sehr erfolgreich oder zumindest nicht erfolgreich genug waren. Verschiedene Gründe werden hierfür angegeben und Kontroversen über geeignete Management-Strategien und deren institutionelle Verankerung halten an (Mace 1996; Munro 1999).

3.2.1 Übernutzung

Es wurde deutlich, dass das Problem der Übernutzung mariner, nachwachsender Ressourcen von aktueller Dringlichkeit ist. Die vielen Facetten der Thematik machen es jedoch notwendig, die weitere Beschreibung auf diejenigen Aspekte zu konzentrieren, die im Rahmen dieser Arbeit untersucht werden.

Ein typisches Muster der Übernutzung einer Spezies lässt sich folgendermaßen charakterisieren (Ströbele 1987; Clark 1990):

1. Gestiegene Nachfrage oder effizientere Fangtechnologien machen die Nutzung der Ressource in hohem Maße rentabel. Dies führt zur Ausweitung der Nutzung durch eine entsprechende Industrie.
2. Die Fangmenge überschreitet die natürliche Regenerationsfähigkeit der Spezies. Der Bestand geht zurück.
3. Mit dem Bestand sinkt langfristig die Rentabilität. Trotzdem wird die Nutzung fortgeführt und der Bestand geht weiter zurück.
4. Letztlich wird der Bestand sehr gering oder ist gar gefährdet. Zugleich sinken die Einkommen in der entsprechenden Industrie, die evtl. zusammenbricht.

Erklärungsansätze

Ökonomische Analysen des Problems machen insbesondere die Rolle fehlender Eigentumsrechte an Fischbeständen für die Ausrottung verantwortlich (Ströbele 1987; Crean 2000). Hierzu ist der Begriff der Allmende-Ressource hilfreich (Ströbele 1987; Linde 1988):

BEZEICHNUNG: Eine **Allmende-Ressource** ist ein Gut, bei dem niemand von der Nutzung ausgeschlossen ist.

Bei marinen Ressourcen in Hoheits- bzw. internationalen Gewässern handelt es sich um Allmende-Ressourcen, denn der Bestand steht in der Regel jedem zur Ernte offen. Durch den Fang gehen Teile der Ressource (Fische, Wale) jedoch in das Eigentum desjenigen über, der ihn erzielt.

Da in der Regel mehrere Akteure eine Allmende-Ressource nutzen, kommt es zu einer Konkurrenzsituation zwischen Unternehmen, aber auch zwischen Nationalstaaten. Dies liefert Anreize zur Intensivierung der Nutzung, denn es ist aus Sicht eines einzelnen Akteurs

sinnvoll, die Fangmenge zu erhöhen, damit dieser Fang nicht einem Konkurrenten zu Gute kommt. Diese Situation spitzte sich historisch in „Fischereikriegen“ zu, wie etwa 1972 um den isländischen Kabeljau (Hanley et al. 1997).

Ein Verzicht auf Entnahme, der den Bestand schonen würde, führt langfristig zur Verbesserung der Ertragssituation, da sich der Bestand erholen kann. Dieser Gewinn kommt allen Akteuren gemeinsam zu Gute. Der Anteil des Verzichtenden daran ist jedoch gering, da sich der Gewinn auf alle Akteure aufteilt. Der für den einzelnen (in Konkurrenz stehenden) Akteur geringe Vorteil steht einem höheren entgangenen Gewinn gegenüber. Diese Spielart des **Gefangenendilemmas** ist ein Beispiel der sog. „Tragedy of the Commons“ (Hardin 1968). Das Gefangenendilemma bezeichnet eine Situation, in der Kooperation zwar günstig für *alle* Akteure ist, *einzelne* jedoch ihre Lage verbessern können, wenn sie sich einseitig unkooperativ verhalten (d.h. „betrügen“). Betrügen jedoch alle, kommt es zum ungünstigsten Ergebnis.

Management-Optionen zur Übernutzung

Als Lösungsvorschlag für dieses Problem kann die Zuteilung exklusiver Eigentumsrechte vorgeschlagen werden.

BEZEICHNUNG: **Exklusive Eigentumsrechte** an einem Gut liegen vor, wenn ein Akteur andere von dessen Nutzung ausschließen kann.

Damit wird die Allmenderessource zu einem privaten Gut. Im Gedankenexperiment werden Unternehmen durch die Zuteilung von abgeschlossenen Ressourcenbeständen quasi zu „Fischteich-Besitzern“. In dieser Situation lohnen sich Maßnahmen, die eine langfristige Nutzung verbessern, da deren Vorteile alleine dem jeweiligen Unternehmen zukommen. Dieser Ansatz führt jedoch nicht notwendigerweise zu einer nachhaltigen Bewirtschaftung, denn selbst dann können ökonomische Anreize zum vollständigen Ausbeuten der Ressource vorliegen. Wächst z.B. der Bestand mit einer geringeren Rate als die Höhe des Marktzinses, kann es sinnvoll sein, den Bestand so schnell wie möglich zu dezimieren. Die Gewinne werden dann am Finanzmarkt angelegt, was größere Einnahmen liefert als eine nachhaltige Bewirtschaftung, bei der nur die Bestandserholung „ausgeschüttet“ wird (Clark 1990).

Es bestehen jedoch weitere Möglichkeiten zum politischen bzw. rechtlichen Eingreifen in den Nutzungsprozess. Unabhängig von deren Zielsetzung und tatsächlicher Durchsetzung lassen sich **Input-** und **Outputmanagement** unterscheiden (Kearney et al. 1996). Die Begriffe beziehen sich auf Input und Output der Fischerei-Industrie. Inputmanagement würde z.B. die verwendeten Betriebsmittel beschränken, Outputmanagement etwa die Fangmenge. Beispiele für ersteres sind technische Auflagen (z.B. Maschenweite der verwendeten Netze, Größe von Schiffen), Fangzeit-Beschränkungen oder begrenzte Zulassung neuer Schiffe. Ein typisches Beispiel für Outputmanagement sind Fangquoten. Von diesen Grundmustern gibt es eine Fülle von Varianten (ausführlicherere Typologien bei Clark 1985, Ströbele 1987).

Die Schwierigkeiten der verschiedenen Management-Optionen sind oft deren mangelnde oder erfolglose Umsetzung. Maßstäbe für deren Wahl sollten die ökonomische Effizienz, die Verfügbarkeit der dafür notwendigen Informationen und die Kosten für ihre Verwaltung und Durchsetzung sein (Hanley et al. 1997). In Bezug auf die Übernutzung mariner

Ressourcen führt Mace (1996) folgende Gründe an, warum eine nachhaltige Konservierung mariner Ressourcen bislang nur in wenigen Fällen gelang:

- Unzureichender wissenschaftlicher Kenntnisstand: Dies betrifft insbesondere die Methoden zur Abschätzung noch vorhandener Bestände mariner Ressourcen. Vor allem Überschätzungen erweisen sich als problematisch.
- Inadäquate Managementziele: In der Vergangenheit wurde oft die Expansion der Fischerei-Industrie gefördert, nicht aber eine nachhaltige Nutzung der Ressourcen.
- Schlechte Datenlage: Hier fehlen insbesondere vollständige, qualitativ hochwertige Zeitreihen schwierig zu ermittelnder Daten, wie Reproduktionsraten von Beständen und Kosten des kommerziellen Fangs.
- Institutionelle Probleme: Mit Fischerei-Management beauftragte Institutionen können die Managementziele nicht umsetzen, Nutzungskonflikte nicht auflösen oder betreiben nicht den notwendigen kommunikativen Aufwand.
- Politik-Fehler: Es fehlt eine langfristige, strategische und integrierte Planung auf lokaler bis internationaler Ebene.

3.2.2 Überkapazitäten

Die Übernutzungsproblematik wird zusätzlich verschärft durch das Auftreten von Überkapazitäten, auf der das Hauptaugenmerk des in dieser Arbeit entwickelten Modells myopischer Fischerei liegt (siehe Kapitel 5). Es kann beobachtet werden, dass Fischerei-Kapazitäten weiter zum Fang genutzt werden, selbst wenn der Ressourcenbestand schon sehr erschöpft und die Gewinne stark gesunken sind. Unter Umständen werden dann sogar weitere Fangkapazitäten aufgebaut, um die Verluste zu kompensieren. In der Zeit von 1970 bis 1989 etwa wuchs die Fangflotte weltweit mit einer doppelt so hohen Rate wie der Fang (Mace 1996). Der Fang pro Fischereiaufwand (CPUE, *catch per unit of effort*) nimmt dabei ab (Goñi 1998). So werden Überkapazitäten als das derzeit größte Problem für die nachhaltige Nutzung mariner Ressourcen angesehen (Mace 1996; FAO 1998). In der Regel sind große Fangkapazitäten mit einer hohen Anzahl von Unternehmen verbunden, die jeweils einen geringen Anteil an den Gesamtkapazitäten haben. Man spricht hierbei von ökonomisch marginalen Unternehmen. Dies bedeutet auch, dass viele Menschen wirtschaftlich von der Fischerei abhängen. Dies verschärft das Gefangenendilemma und verhindert nachhaltige Strategien, da in dieser Situation meist kurzfristige Gewinne vorgezogen werden. Zugleich wird der Druck auf die Politik erhöht, etwaige Management-Ansätze wieder auszuhöhlen oder Subventionen zu intensivieren. Letzteres führt dann möglicherweise zu noch größeren Überkapazitäten, obwohl die Bestände bereits extrem reduziert sind. Verschiedenen Schätzungen mit Hilfe bioökonomischer Modelle zu Folge müssten die weltweiten Fangflotten um bis zu ca. 50% reduziert werden oder die Preise für verkauften Fisch um ca. 70% steigen, damit überhaupt wieder kostendeckend gearbeitet werden kann (Garcia and Newton 1997).

Der Begriff der Kapazitäten und Überkapazitäten ist quantitativ nur schwer zu erfassen. Kapazitäten werden beispielsweise durch die Anzahl an Schiffen bestimmter Größe oder durch ihr Volumen in Bruttoregistertonnen gemessen (Clark and Lamberson 1982; FAO

1998). Alternativ werden Fischerei-Kapazitäten mit investiertem Kapital gleichgesetzt, um aus ökonomischer Sicht eine kapitaltheoretische Behandlung zu ermöglichen (Clark et al. 1979; McKelvey 1985). Dieser Ansatz wird auch in den Modellen dieser Arbeit verfolgt. Die Schwierigkeit, diese Größe quantitativ hinreichend zu operationalisieren, wird durch die Verwendung qualitativer Differentialgleichungen umgangen. Im Folgenden sollen die Begriffe Kapazitäten und Kapital synonym verwendet werden, ebenso Überkapazitäten und Überkapitalisierung. Eine exakte, quantitative Definition von Überkapazitäten ist jedoch noch problematischer als die der Kapazitäten. Mögliche Indikatoren hierfür sind etwa sinkender Fang pro Schiff oder die Verkürzung der Dauer von Fangperioden im Jahr (Mace 1996). Das Muster der Übernutzung durch Überkapitalisierung lässt sich folgendermaßen skizzieren:

1. Anfänglich wird eine intensive Ausbeutung der marinen Ressource und der Aufbau der zugehörigen Infrastruktur beobachtet.
2. Trotz zurückgehender Bestände und steigender Kosten wird die Ressource weiter genutzt und die Kapazitäten ausgebaut.
3. Die Bestände sinken beschleunigt. Späte Versuche, die Kapazitäten abzubauen, erfolgen zu langsam. Die Nahrungs- bzw. Einkommensquelle versiegt.

Erklärungsansätze

Zur weiteren Erläuterung des Problemkomplexes werden zunächst weitere ökonomische Begriffe präzisiert (Westphal 1994; Varian 1995).

BEZEICHNUNG: Mit (physischem) **Kapital** werden Produktionsfaktoren bezeichnet, die ihrerseits produzierte Güter sind. **Investitionen** sind Ankäufe von Kapital, selbst hergestelltes Kapital, sowie größere Reparaturen des Kapitals. Die dadurch entstehenden Kosten sind **Investitionskosten**. **Abschreibungen** sind die (geschätzte) Wertminderung des Kapitals durch Verschleiß im Produktionsprozess und durch wirtschaftliches Veralten. Zieht man von den Investitionen die Abschreibungen ab, so erhält man die **Nettoinvestitionen**.

Das Muster der Übernutzung durch Überkapazitäten kann mit folgenden Gründen plausibel gemacht werden:

- Durch Investitionen kann eine sinkende Ernte zumindest zeitweise kompensiert werden.
- In Konkurrenz zu anderen Fischereiunternehmen wird mehr Kapital investiert, als aus gesamtwirtschaftlicher Sicht optimal wäre, da jedes Unternehmen einen möglichst großen Teil der Allmende-Ressource für sich entnehmen will.
- Investitionen in Fangkapazitäten sind irreversibel: Einmal getätigt können sie nur mit Verlusten rückgängig gemacht werden, da sie allenfalls noch als Schrott veräußert werden können. Da die mit den Investitionen verbundenen Kosten schon bezahlt sind, werden die Kapazitäten so lange genutzt, wie die Einnahmen durch die Ernte noch die Betriebskosten (die nicht die Investitionskosten beinhalten) decken. Das Kapital sinkt also nur durch Abschreibungen (McKelvey 1985).

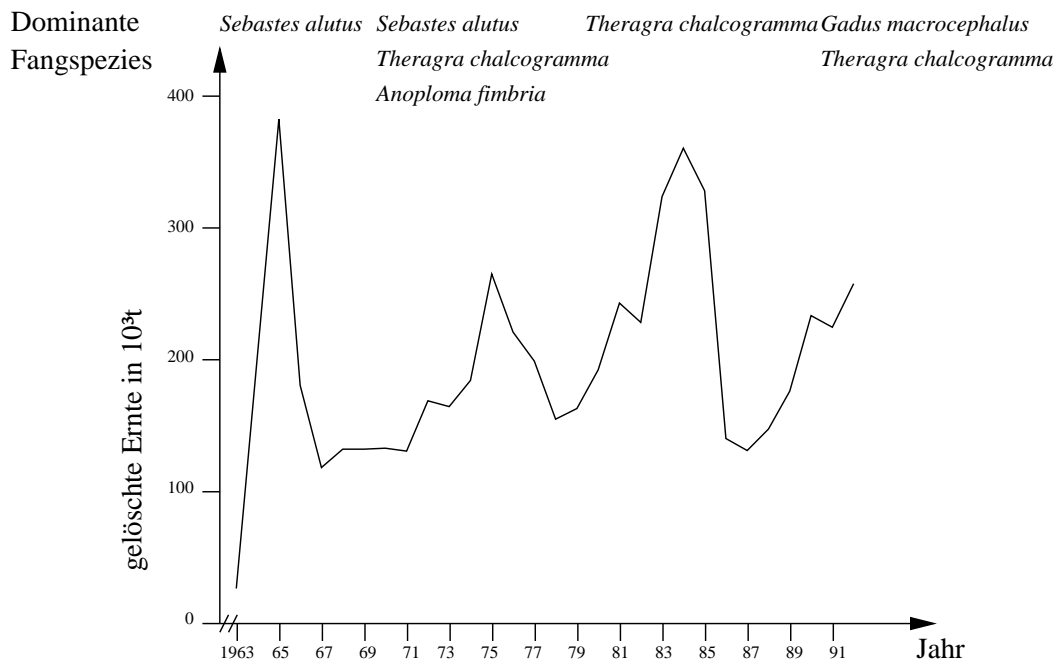


Abbildung 3.1: Serielle Überfischung im Golf von Alaska von 1963 bis 1991 (nach Goñi 1998). Für jeden Peak der insgesamt gelöschten Ernte sind die Spezies angegeben, die jeweils den Großteil dieser Menge bilden. Man sieht, dass *Sebastes alutus* nach 1975 unbedeutend, und als dominante Fangspezies durch *Theragra chalcogramma* abgelöst wurde. Ab 1991 verlor jedoch auch diese Art an Bedeutung, und wurde durch *Gadus macrocephalus* substituiert.

Man beachte auch einige weitere Folgeprobleme der Überkapitalisierung. Abgesehen von lokaler Fischerei agieren auch globale Fangflotten. Diese bestehen meist aus schwimmenden Fabrikeinheiten mit den sie versorgenden Schiffen. Diese können den Fanggrund wechseln, wenn ein Bestand erschöpft ist (Clark and Lamberson 1982).

Dieses Vorgehen kann als Reaktion auf das Problem der Überkapitalisierung interpretiert werden. Da die aufgebauten Fangkapazitäten nicht verkauft werden können, nachdem die anfänglichen Bestände erschöpft sind, wechselt man die Region, um wieder kostengünstiger zu fangen. Dort treten dann sehr schnell umfangreiche Kapazitäten auf, da sie nicht über längere Zeiträume neu aufgebaut werden müssen. Zum einen werden dadurch u.U. Subsistenzfischer in ihrer Existenz bedroht, wenn ihre Fanggründe abgefischt werden (Mace 1996). Zum anderen spricht man von serieller Überfischung (*serial overfishing* oder *spillover-effects*) (Goñi 1998), wenn dadurch eine Spezies nach der anderen systematisch an den Rand der Ausrottung gedrängt wird (siehe Abbildung 3.1).

Management-Optionen zu Überkapazitäten

Neben den vorgeschlagenen Management-Optionen zur Übernutzung (siehe S. 36) legen Überkapazitäten weitere Maßnahmen nahe. Solche sind wissenschaftlich bislang wenig untersucht und erprobt worden, da dem Problem nur geringe Aufmerksamkeit geschenkt wurde (FAO 1998; Munro 1999; Anderies 2000). Außerdem betrifft das Problem überwiegend internationale Gewässer, was eine Durchsetzung erschwert.

Ein Ansatz ist die Implementierung so genannter *buy-back programs*, bei denen überschüssige Fangeinrichtungen von staatlicher Seite aufgekauft werden (Munro 1999). Allerdings können eine Reihe von Folgeproblemen entstehen, wenn etwa die EU derartige Programme durchführt, zugleich aber auch den Aufbau neuer Fangkapazitäten fördert (Hatcher 2000).

3.3 Bioökonomische Modelle

In der Bioökonomik versucht man, die genannten Probleme mit mathematischen Modellen zu beschreiben bzw. zu erklären, und mögliche Maßnahmen zu evaluieren. Aus ökonomischen Annahmen über das Verhalten beteiligter Akteure (z.B. die homo-oeconomicus-Prämisse) werden deren Reaktionen auf Veränderungen im Ressourcenbestand deduziert. Aus mathematischer Sicht handelt es sich dabei in der Regel um Optimierungsaufgaben. Zugleich sind diese Modelle jedoch mit populationsdynamischen Annahmen aus der Ökologie gekoppelt.

Erste Arbeiten gehen auf Gordon (1954) und Schaefer (1954) zurück. Ein eher biologisch geprägter Ansatz, der keine ökonomischen Fragen, dafür aber altersstrukturierte Populationen berücksichtigt, wurde von Beverton and Holt (1957) verfolgt. Weitere Arbeiten (Clark 1972; Clark et al. 1979; Clark 1981; Clark and Lamberson 1982) führten dann zu einer Vielzahl von Modellen, die vermutlich erst durch Fortschritte in der dynamischen Optimierung (siehe Abschnitt 5.2.1) analysierbar waren (Townsend 1986; Prager 1994; Homans and Wilen 1997). Inzwischen existieren viele Übersichtsdarstellungen dieser grundlegenden Modelle (Vincent and Skowronski 1981; Clark 1985; Conrad and Clark 1987; Ströbele 1987; Clark 1990; Hanley et al. 1997; Wacker and Blank 1998). Im Weiteren wird nun die typische Struktur derartiger Modelle herausgearbeitet, wobei weitere ökonomische Begriffe definiert werden.

3.3.1 Typische Modellstruktur

Bioökonomische Modelle machen Annahmen zu folgenden Bereichen, die im Anschluss näher vorgestellt werden:

1. Populationsdynamik: Welche bewirtschafteten marinen Ressourcen gibt es? Wie entwickeln sie sich in der Zeit?
2. Wirtschaftsweise: Wer sind die ökonomischen Akteure? Welche Eigentumsrechte an der marinen Ressource liegen vor? Wie werden Preise gebildet? Welche Regulierungsmaßnahmen wirken?
3. Erlöse: Wovon hängt der Erlös der Akteure ab und in welcher Weise?
4. Kosten: Wodurch und in welcher Weise entstehen den Akteuren Kosten?
5. Verhalten: Wie lässt sich das Verhalten der Akteure beschreiben? Das heißt in der Regel: Worüber können sie entscheiden? Welche Zielgrößen versuchen sie zu optimieren?

Mit diesen Annahmen werden sog. Verhaltensgleichungen ermittelt, bei denen es sich um ein Differentialgleichungssystem handelt, welches weiter analysiert werden kann.

Populationsdynamik

Die meisten bioökonomischen Modelle gehen von einer einzigen genutzten Spezies mit homogener Struktur aus. Das Wachstum von deren Bestand x lässt sich durch die logistische Differentialgleichung beschreiben:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha x - \beta x^2, \\ x(0) &= x_0.\end{aligned}$$

Die Eigenschaften des logistischen Wachstums lassen sich leicht untersuchen, auch Varianten wurden ausführlich behandelt (z.B. Bazykin 1976; Metzler 1987; Heuser 1991). Ein solches System hat zwei Gleichgewichtszustände, einen instabilen bei $x = 0$ und einen stabilen bei $x = Q := \frac{\alpha}{\beta}$. Die Größe Q wird auch als natürliche **Kapazitätsgrenze** bezeichnet. Für Anfangswerte $x_0 > Q$ fallen Lösungen der DGL monoton und nähern sich asymptotisch der Kapazitätsgrenze Q . Für Anfangswerte $0 < x_0 < Q$ steigen Lösungen dagegen. Die maximale Ableitung erreichen Lösungen bei $x = \frac{Q}{2}$.

Der maximale Betrag der Ableitung \dot{x} wird aus bioökonomischer Sicht als **maximaler nachhaltiger Ertrag** (*maximum sustainable yield, MSY*) bezeichnet. Wird die Bestandszunahme \dot{x} nämlich durch eine Inhomogenität reduziert, die über diesem Wert liegt, sinkt die Lösung x auf 0. Wird die Bestandszunahme dagegen um einen geringeren Betrag reduziert, verschiebt sich das stabile Gleichgewicht nur zu einem niedrigeren Wert Q' mit $0 < Q' < Q$.

Auch biologisch lässt sich diese Populationsdynamik fundieren, wie Beobachtungen unter Versuchsbedingungen zeigen. Erklärt wird dies mit sog. intraspezifischer Konkurrenz. Befindet sich der Bestand an der Kapazitätsgrenze, die durch Umweltbedingungen (etwa Nahrungsangebot) gegeben ist, kann die Population nicht mehr zunehmen. Schon bei einem Bestand unterhalb der Kapazitätsgrenze führt Konkurrenz innerhalb der Spezies zu einem geringeren Wachstum (Begon et al. 1991).

Andere Varianten zu populationsdynamischen Annahmen sind etwa nach Alters- oder Größengruppen strukturierte Populationen (Beverton and Holt 1957; Polachek 1990). Ebenso kann an die populationsdynamischen Modelle von Lotka und Volterra angeknüpft werden (Lotka 1956), um die Bewirtschaftung von Spezies, die in Räuber-Beute-Verhältnissen stehen, zu studieren (Ströbele and Wacker 1995).

Wirtschaftsweise

Die Annahmen zur Wirtschaftsweise fokussieren insbesondere auf die Eigenschaften der auftretenden Akteure, worüber sie entscheiden können, und welche Nebenbedingungen sie akzeptieren müssen. Bezüglich der Eigentumsverhältnisse wurden bereits exklusive Eigentumsrechte und Allmende-Ressourcen vorgestellt. Hieraus und aus der Anzahl der Akteure resultieren die Konkurrenzverhältnisse in den Fischgründen. Eine andere Seite sind die Konkurrenzverhältnisse am Markt, an dem die geernteten Ressourcen verkauft werden. Im Allgemeinen hängt es auch hier von der Anzahl der Unternehmen ab, wie stark ihr Einfluss auf den erzielten Preis ist. Man unterscheidet Monopol, Oligopol und vollständige Konkurrenz (Linde 1988; Varian 1995).

BEZEICHNUNG: Wird ein Markt von einem einzigen Anbieter beherrscht, liegt ein **Monopol** vor. Gibt es wenige Anbieter, die den Markt beherrschen, so spricht man

von einem **Oligopol**. **Vollkommene Konkurrenz** bezeichnet den Fall, in dem jedes Unternehmen annimmt, keinen Einfluss auf den Marktpreis zu haben.

Im Fall vollkommener Konkurrenz gilt also insbesondere, dass die Unternehmen den aktuellen Marktpreis ihres Produktes jeweils als gegeben nehmen und unter dieser Voraussetzung ihre Entscheidungen treffen. Man spricht daher auch von **Preisnehmern**. Man kann sich hierunter insbesondere eine Situation vorstellen, in der sehr viele Unternehmen agieren, von denen keines über nennenswerte Marktmacht verfügt. Die einzelnen Entscheidungen haben dann zwar durchaus einen Einfluss auf den Markt, dieser ist aber so gering, dass es aus Sicht des einzelnen Unternehmens nicht sinnvoll ist, diesen einzukalkulieren.

Erlös und Kosten

Entscheidungen von Unternehmen hängen insbesondere vom resultierenden Ertrag und den entstehenden Kosten ab. Da man in der Regel davon ausgeht, dass Unternehmen ihren Gewinn maximieren, ist es notwendig, Annahmen zu Kosten und Erlösen zu treffen. Außerdem unterliegt die Produktion in einem Unternehmen gewissen Beschränkungen, die durch eine Produktionsfunktion angegeben werden können. Die genannten ökonomischen Begriffe lassen sich folgendermaßen fassen (Linde 1988):

BEZEICHNUNG: Das **Produktionsergebnis** ist die produzierte Gütermenge; die Mittel, die hierfür eingesetzt werden, heißen **Produktionsfaktoren**. Eine **Produktionsfunktion** $f : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, $[x_1, \dots, x_n] \mapsto h = f(x_1, \dots, x_n)$ beschreibt die Beziehungen zwischen der Menge der eingesetzten Produktionsfaktoren x_1, \dots, x_n und dem Produktionsergebnis h . Multipliziert man den verkauften Anteil des Produktionsergebnisses mit dem dafür erzielten Preis, erhält man den **Erlös**. Die **Kosten** entstehen durch den Einsatz der Produktionsfaktoren. Der **Gewinn** ist die Differenz aus Erlösen und Kosten.

Im bioökonomischen Kontext spricht man anstatt von Kosten auch von Erntekosten, da sie durch das Produktionsergebnis „Ernte“ anfallen. Dabei unterscheidet man außerdem zwischen **bestandsabhängigen Erntekosten** und **bestandsunabhängigen Erntekosten**, je nachdem sie vom Bestand der Ressource abhängig sind oder nicht. Allgemeiner kann man die Kosten durch eine Gesamtkostenfunktion angeben:

BEZEICHNUNG: Eine **Gesamtkostenfunktion** $c : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $h \mapsto c(h)$ ordnet einem angestrebten Produktionsergebnis h die Kosten zu, die durch die dafür benötigten Produktionsfaktoren entstehen.

Dabei kann die Gesamtkostenfunktion auch Parameter enthalten, die die Abhängigkeit von weiteren Größen - etwa Marktpreisen oder dem Ressourcenbestand - modellieren. Mit den vorliegenden Begriffen kann nun auch folgendes definiert werden:

BEZEICHNUNG: Durch eine Produktionsfunktion f und eine Gesamtkostenfunktion c ist bei gegebenem Marktpreis p die **Gewinnfunktion** $\pi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $h \mapsto ph - c(h)$ gegeben, die jedem Produktionsergebnis h den damit erzielten Gewinn zuordnet.

Bei Produktionsfunktionen geht man oft vom sog. **Ertragsgesetz** aus. Demzufolge fällt ein Gewinnzuwachs durch Erhöhung von h mit steigendem Produktionsergebnis immer kleiner aus, da die besten Gewinnmöglichkeiten zuerst genutzt werden (Linde 1988). Mathematisch bedeutet dies, dass die Gewinnfunktion monoton steigend und konkav ist.

Verhalten

Auf der Basis der Annahmen zu Wirtschaftsweise, Erlösen und Kosten, werden weitere Aussagen über das Verhalten der Akteure gemacht. Der gängigste Ansatz ist die sog. homo-oeconomicus-Prämisse. Derzufolge wird unter realisierbaren Alternativen diejenige ausgewählt, die den Nutzen des Entscheidungsträgers maximiert. Indem dieser Nutzen (in der Regel durch den Gewinn) operationalisiert wird, und indem man unterstellt, dass die Akteure ihre Entscheidung auch tatsächlich durchzusetzen versuchen, wird aus dem Entscheidungsmodell ein Verhaltensmodell (Linde 1988).

Betrachtet man die Entscheidung zu einem gegebenen Zeitpunkt t und hat dort eine Gewinnfunktion π gegeben, so wird das Unternehmen ein Produktionsergebnis h anstreben, welches $\pi(h)$ maximiert. Der Entscheidungsprozess ist damit folgendermaßen als Optimierungsaufgabe formuliert:

$$\text{Wähle } h^* \in \mathbb{R}_+ \text{ so, dass } \pi(h^*) = \max_h \pi(h).$$

Der Wert h^* ist die gewinnmaximierende Entscheidung des Unternehmens zum Zeitpunkt t . Da die meisten bioökonomischen Modelle die regenerierende Ressource und die Entscheidungen der Unternehmen jedoch über einen Zeitraum, etwa ein Zeitintervall $J := [0, T]$ betrachten, muss diese Formulierung u.U. geändert werden. In diesem Fall kann die Gewinnfunktion nämlich mit dem Zeitpunkt $t \in J$ variieren, da sich beispielsweise die Erlöse durch geänderte Marktpreise oder die Kosten durch einen geänderten Ressourcenbestand geändert haben. Wenn das Unternehmen über das Produktionsergebnis h , also etwa die gefangene Menge an Fischen, entscheidet, ist damit eine Gewinnfunktion $\pi(t, h)$ gegeben. Die Entscheidung erfolgt dann nicht mehr über einen einzelnen Wert für h , sondern für den ganzen Verlauf von h im Zeitintervall J - es ist also eine Entscheidung für eine Funktion. Eine solche Funktion wird daher auch als **Entscheidungsfunktion** bezeichnet.

Zunächst ist es plausibel anzunehmen, dass eine Entscheidungsfunktion h nicht schlechter als eine Entscheidungsfunktion h' ist, wenn

$$\forall t \in J : \pi(t, h) \geq \pi(t, h')$$

gilt. Würde man hierdurch eine Relation auf der Menge der möglichen Entscheidungsfunktionen definieren, wäre die Menge dadurch nicht vollständig geordnet. Ökonomisch bedeutete dies, dass manche Entscheidungen nicht vergleichbar wären. Andererseits kann es durchaus sinnvoll sein, zu einem Zeitpunkt auf Gewinne zu verzichten, um zu einem späteren Zeitpunkt dafür höhere Gewinne zu erzielen. Eine Ordnungsrelation zwischen Entscheidungsfunktionen sollte dies berücksichtigen. In der Terminologie der Mikroökonomik spricht man von sog. **Zeitpräferenzen**, die beschreiben, in welchem Maß gegenwärtige Gewinne zukünftigen vorgezogen werden (Linde 1988). Insbesondere zwei Gründe sprechen für die Präferenz von Entscheidungsträgern für gegenwärtige Gewinne: Zum einen ist die tatsächliche Erzielung zukünftiger Gewinn mit Unsicherheit und Risiko behaftet. Zum anderen könnte man auf gegenwärtige Einkünfte verzichten, um sie am Finanzmarkt anzulegen,

wo ein Zinssatz r realisierbar ist. Werden die aus den Zinsen zu erwartenden zukünftigen Einnahmen höher bewertet als der gegenwärtige Verzicht, ist eine solche Entscheidung vorzuziehen. Für einen Vergleich von Gewinnen zu verschiedenen Zeitpunkten ist es also sinnvoll, zukünftige Gewinne mit dem Zinssatz r abzudiskontieren. Die Konstante r wird daher auch als Diskontrate bezeichnet. In der folgenden Definition wird dies durch Multiplikation mit dem monoton fallenden Faktor $e^{-rt} < 1$ erreicht, womit zukünftige Gewinne schwächer gewichtet sind als gegenwärtige.

DEFINITION 3.1: Es sei ein Intervall $J = [0, T]$ vorgegeben und eine stetige Gewinnfunktion $\pi : h(t) \mapsto \pi(h(t))$ mit $t \in J$; $h : J \rightarrow \mathbb{R}_+$ sei eine stückweise stetige Entscheidungsfunktion auf J . Ferner sei die reelle Zahl $r > 0$ vorgegeben. Dann ist der **Gesamtgewinn zum Gegenwartswert** durch

$$\Pi(h) := \int_J e^{-rt} \pi(h(t)) dt.$$

definiert. Der Wert r wird als **Diskontrate** bezeichnet, das Intervall J als **Planungsintervall**, und T als **Zeithorizont**.

Da J kompakt ist, existiert das Integral unter den angegebenen Bedingungen, und der reellwertige Gesamtgewinn zum Gegenwartswert induziert damit durch die übliche Ordnung auf \mathbb{R} eine Ordnung auf der Menge der (auf J stückweise stetigen) Entscheidungsfunktionen. Damit kann die Aufgabe formuliert werden, eine beste Entscheidungsfunktion zu finden. Diese liefert dann einen maximalen Gesamtgewinn zum Gegenwartswert. Bei der Ermittlung der optimalen Entscheidungsfunktion handelt es sich um ein Problem der sog. dynamischen Optimierung (siehe Abschnitt 5.2.1).

Wenn die Rationalitätsannahme also lautet, dass jedes Unternehmen auf Dauer seinen Gewinn maximiert, und dieses Ziel auf obige Weise formalisiert wird, lassen sich daraus die Entscheidungen der Unternehmen ableiten.

Verhaltensgleichungen und ihre Analyse

Zur Lösung des dynamischen Optimierungsproblems werden meistens das Maximumprinzip von Pontryagin et al. (1962) oder ähnliche Theoreme angewandt. Diese liefern im Erfolgsfall ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem für alle im Modell vorkommenden variablen Größen, inklusive der Entscheidungsfunktion. Die Gleichungen werden als Verhaltensgleichungen bezeichnet. Deren Lösungseigenschaften können dann im Weiteren untersucht werden.

Hierbei interessiert man sich insbesondere für die Gleichgewichtszustände (*steady states*), in der alle Funktionen des Modells konstant werden. Ein Gleichgewicht wird auch als bioökonomischer „Endzustand“ interpretiert, in den das System bei störungsfreier Entwicklung übergeht. An diesen Stellen kann auch eine Stabilitätsanalyse erfolgen. Die Dynamik des Systems außerhalb des Gleichgewichtszustandes wird eher selten untersucht, und dann meist anhand eines Phasendiagramms.

3.3.2 Ein einfaches Fischereimodell

Die vorgestellte Systematik wird nun beispielhaft an einem typischen Modell mit exklusiven Eigentumsrechten und nichtlinearer Gewinnfunktion erläutert (Clark 1990; Wacker and

Blank 1998). Es geht an dieser Stelle nicht darum, dieses Modell vollständig zu diskutieren, sondern die Konzepte zu verdeutlichen. In Abschnitt 3.3.3 geht die Arbeit auf Weiterentwicklungen durch McKelvey (1985) ein. Partielle Ableitungen werden aus Gründen der Übersichtlichkeit durch Indices bezeichnet, die das Argument, nach dem abgeleitet wird, angeben.

Populationsdynamik

Das Modell geht von einer einzigen Fangspezies aus, die sich je nach Bestand x durch eine Regenerationsfunktion F vermehrt. Durch die Bestandsentnahme h wird der Bestand reduziert. Dies wird durch die Differentialgleichung

$$\dot{x} = F(x) - h \quad (3.1)$$

beschrieben. Die Funktion F sei derart, dass logistisches Wachstum für x resultiert.

Wirtschaftsweise

Jeder Marktteilnehmer verfügt über einen eigenen, abgeschlossenen Fanggrund. Der Bestand unterliegt somit jeweils der Kontrolle eines einzelnen Akteurs, der über seine Fangmenge h entscheidet. Es liegen also exklusive Eigentumsrechte vor. Der Fang wird jedoch in Konkurrenz mit vielen Unternehmen am selben Markt gehandelt, wo vollkommene Konkurrenz vorliegt; die Fischereiunternehmen haben also keinen Einfluss auf den Preis.

Erlös und Kosten

Erlös und Kosten werden nicht als einzelne Funktionen angesetzt, sondern zu einer Gewinnfunktion $\pi(h)$ zusammengefasst. Diese gibt an, welcher Gewinn mit einer Erntemenge h gemacht wird. Der Gewinn hängt nicht vom Bestand der Ressource ab und ist unabhängig von der Zeit (das setzt zwar keine konstanten Marktpreise voraus, aber dass diese nur von der Erntemenge h abhängen). Die Gewinnfunktion sei stetig differenzierbar, konkav und nicht-linear. Die Konkavitätsannahme lässt sich mit dem Ertragsgesetz ökonomisch begründen.

Verhalten

Die Fangentscheidung erfolgt mit dem Ziel, den Gewinn zum Gegenwartswert zu maximieren. Hierzu wird der Zeithorizont $J = [0, T]$ angesetzt. Zu optimieren ist das Funktional

$$\Pi(h) = \int_J e^{-rt} \pi(h) dt$$

mit der Diskontrate r . Im Modell wird später der Fall $T \rightarrow \infty$ betrachtet - der Akteur ist also „sehr vorausschauend“. Die Wahl der optimalen Erntefunktion h muss unter Berücksichtigung der Differentialgleichung (3.1) für die Populationsdynamik erfolgen.

Verhaltensgleichungen und ihre Analyse

Durch Anwendung des Maximumprinzips (siehe Abschnitt 5.2.1) gewinnt man das gewöhnliche Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(x) - h, \\ \dot{h} &= \frac{\pi_h(h)}{\pi_{hh}(h)}(r - F_x(x))\end{aligned}$$

als notwendige Bedingungen an die optimale Erntefunktion h . Der Gleichgewichtszustand des Systems wird durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}F(x) &= h, \\ 0 &= \frac{\pi_h(h)}{\pi_{hh}(h)}(r - F_x(x))\end{aligned}$$

gegeben. Die zweite Gleichung vereinfacht sich zur Bedingung

$$F_x(x) = r.$$

Der Anfangswert $x(0) = x_0$ ergibt sich aus der zu modellierenden Situation: Es ist der anfänglich gegebene Bestand der Ressource. Schwieriger ist die Bestimmung von $h(0)$, da dieser Wert Gegenstand der Entscheidung ist und hiervon der Wert des Zielfunktionals abhängt. Diese Untersuchung erfolgt bei Clark (1990) und Wacker and Blank (1998) an Hand eines Phasendiagrammes (siehe Abb. 3.2).

Als optimal wird derjenige Wert für $h(0)$ angesehen, bei dem das System in das Gleichgewicht läuft. Eine weitere Untersuchung zeigt, dass dies nur für $T \rightarrow \infty$ möglich ist, da es sich beim Gleichgewicht um einen Sattelpunkt handelt.

Am Modell kann außerdem der Einfluss der Parameter auf das Gleichgewicht untersucht werden. Ist die Diskontrate r größer als $F_x(0)$ wird der Bestand ausgerottet; betrachtet man den Fall $r \rightarrow 0$ liegt das Gleichgewicht genau beim maximalen nachhaltigen Ertrag (*MSY*). Ansonsten liegt der Bestand im Gleichgewicht immer unterhalb dieser Größe und sinkt mit steigender Diskontrate.

3.3.3 Modelle zur Überkapitalisierung

Das einfache Fischereimodell berücksichtigt nicht das in der Fischerei-Wirtschaft investierte Kapital. Die angeführte Problembeschreibung (siehe Abschnitt 3.2.2) legt es jedoch nahe, dass diesem Aspekt eine wichtige Bedeutung zukommt. Die Literaturlage hierzu ist unbefriedigend. Wie Munro (1999) feststellt, existieren lediglich drei Modelle hierzu, nämlich die von Clark et al. (1979), McKelvey (1985) und McKelvey (1986). Dabei stellt das letztere eine Verallgemeinerung der ersten beiden dar. Diese beschränken sich auf den Fall von exklusiven Eigentumsrechten bzw. vollkommener Konkurrenz. Um einen Einblick in den Stand der Forschung zu ermöglichen, werden hier wichtige Ergebnisse des allgemeineren Ansatzes vorgestellt. Es ist ein Ziel dieser Arbeit, dieses Modell zu verbessern (siehe Kapitel 5).

Der Bestand der Ressource wird mit x bezeichnet und mit einer konkaven Regenerationsfunktion F ausgezeichnet, die logistisches Wachstum liefert. Jedes Unternehmen wird

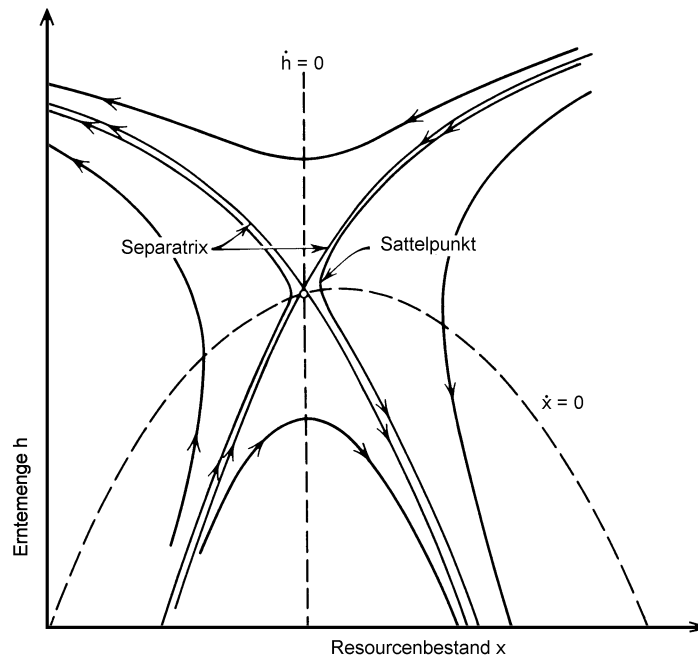


Abbildung 3.2: Phasendiagramm des diskutierten einfachen Fischereimodells (nach Clark 1990).

durch dessen Kapitalbestand K charakterisiert und entscheidet über seine Erntemenge h sowie die Höhe der Investitionen I . Die Populationsdynamik wird durch die Differentialgleichung

$$\dot{x} = F(x) - h - h' \quad (3.2)$$

modelliert. Dabei bezeichnet h die durch ein speziell betrachtetes Unternehmen, h' die durch dessen Konkurrenten geerntete Population.

Auf dem Markt agieren N Unternehmen. Der Fall $N = 1$ entspricht damit exklusiven Eigentumsrechten, und der Fall $N \rightarrow \infty$ vollständiger Konkurrenz. Im Modell wird in Betracht gezogen, dass der erzielte Preis p mit der insgesamt angebotenen Erntemenge fällt, die weitere analytische Behandlung erfolgt jedoch unter der Annahme, dass der Preis konstant ist.

Zusätzlich wird eine sog. Homogenitätsannahme getroffen, der zufolge alle Unternehmen über die gleichen Informationen verfügen, gleiche Kosten und gleichen Kapitalbestand haben, sowie die gleichen Entscheidungen treffen. Damit kann von einem repräsentativen Unternehmen ausgegangen werden, dessen Fangmenge h beträgt. Die Fangmenge durch alle Unternehmen zusammen beträgt dann $h + h' = Nh$.

Die bestandabhängigen Erntekosten sind linear in der Erntemenge und werden mit der Funktion

$$c^E(x, h) = w(x)h$$

angesetzt, wobei die Funktion w die Kosten pro Ernteeinheit angibt. Man beachte, dass hier zwar der Bestand der Ressource x , nicht aber der Kapitalbestand K des Unternehmens ein-

geht. Dieser wird durch die maximale verwirklichte Fangmenge wirksam. Es handelt sich beim Kapital also nicht etwa um Einrichtungen zur Fangeffizienz, sondern Fangkapazitäten im engeren Sinne, etwa Schiffe oder Netze. Somit erhält man den Zusammenhang

$$0 \leq h \leq qxK,$$

wobei q ein konstanter Effizienzparameter ist. Die verwendete Fangtechnologie ist also linear im Bestand x und im Kapital K . Der Kapitalbestandes kann durch Investitionen I erhöht werden, verliert jedoch durch Abschreibungen an Wert. Es wird angenommen, dass diese linear mit dem Kapitalbestand zunehmen. Mit dem positiven Abschreibungsparameters δ wird dies durch die Differentialgleichung

$$\dot{K} = I - \delta K$$

dargestellt.

Die Unternehmen entscheiden u.a. über die Höhe der Investitionen I in der Zeit. Daher sind Annahmen zu treffen, aus welcher Menge diese Investitionsfunktion gewählt werden kann. Die Irreversibilität der Investitionen wird durch die Bedingung $I \geq 0$ berücksichtigt. McKelvey bleibt ansonsten sehr allgemein, indem er sog. Puls-Investitionen zulässt.

DEFINITION 3.2: Der Kapitalbestand eines Unternehmens sei durch eine Funktion $K : J \rightarrow \mathbb{R}_+$ gegeben. Es existiere ein $t \in J$, so dass $\lim_{\tau \rightarrow t+} K(\tau) - \lim_{\tau \rightarrow t-} K(\tau)$ endlich ist. Dann liegt an der Stelle t eine **Puls-Investition** vor.

BEISPIEL: Es sei

$$K(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 1, \\ 1 & \text{für } t > 1. \end{cases}$$

Dann liegt bei $t = 1$ eine Puls-Investition vor, da $\lim_{\tau \rightarrow 1+} K(\tau) - \lim_{\tau \rightarrow 1-} K(\tau) = 1$. Damit kann K keine Lösung einer Differentialgleichung sein, da die Ableitung von K an der Stelle $t = 1$ nicht definiert ist.

Bei Puls-Investitionen wird der Kapitalstock also in „sehr kurzer“ Zeit auf ein höheres Niveau gesetzt. Aus mathematischer Sicht ist dies problematisch, da I dann nicht mehr als Funktion im gewöhnlichen Sinne aufgefasst werden kann. Dies hat Konsequenzen für den Lösungsbegriff der verwendeten Differentialgleichungen. Auf weitere Probleme wird im Folgenden noch eingegangen.

Investitionen der Höhe I sind mit Kosten $c^I(I)$ verbunden. Damit das Modell analytisch behandelbar bleibt, beschränkt sich McKelvey auf den Fall linearer Kosten in I . Sie sind durch die Funktion

$$c^I(I) = c \cdot I$$

mit der Konstanten $c \in \mathbb{R}_+$ gegeben. Es zeigt sich später, dass diese Idealisierung der Grund ist, aus dem Puls-Investitionen zugelassen werden. Die Investitionskosten werden bei Puls-Investitionen mit

$$c^I = c \cdot \left(\lim_{\tau \rightarrow t+} K(\tau) - \lim_{\tau \rightarrow t-} K(\tau) \right)$$

angesetzt.

Das Verhalten der Unternehmen wird wieder aus der Annahme der Gewinnmaximierung abgeleitet, wobei der Gesamtgewinn zum Gegenwartwert durch

$$\Pi = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \left[(p - w(x))h - c \cdot I \right] dt$$

gegeben ist. Er setzt sich zusammen aus dem Erlös $p \cdot h$, von dem die Erntekosten $w(x)h$ und die Investitionskosten $c \cdot I$ abgezogen werden. Aufgrund der Homogenitätsannahme wird jedes Unternehmen die Fangentscheidungen der anderen Unternehmen als gegeben nehmen und antizipieren, um Π zu maximieren. Daraus erhält man letztlich wieder ein Problem der dynamischen Optimierung: Wähle Funktionen h^* und I^* derart, dass mit den zugehörigen Lösungen der Differentialgleichungen für x und K das Funktional Π maximal wird unter allen möglichen Funktionen h und I . Dabei soll außerdem gelten, dass $0 \leq h \leq qxK$ und $I \geq 0$.

McKelvey führt ein Theorem von Mangasarian (1966) an, um die Optimierungsaufgabe zu lösen. Die optimale Ernte und das optimale Investitionsverhalten seien demzufolge Lösungen des folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungssystems, in dem die weiteren Funktionen λ , μ , σ , $\hat{\sigma}$ und ρ eingeführt werden:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x) - Nh, \\ \dot{K} &= I - \delta K, \\ \dot{\mu} - r\mu &= \delta\mu - \sigma qx, \\ \dot{\lambda} - r\lambda &= -F_x(x)\lambda + w_x(x)h - \sigma qK, \\ \sigma &= \max(0, p - w(x) - \lambda). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Außerdem muss für jeden Punkt $t \in [0, \infty]$ die Funktion

$$H = (p - w(x) - \lambda)h - c \cdot I + \mu(I - \delta K) + \lambda F(x)$$

bezüglich der Entscheidungsfunktionen I und h maximiert werden. Da H linear in I und h ist, kann ein Extremum nur an den Rändern der Bildbereiche liegen. Der untere Rand liegt jeweils bei 0, der obere ist für h laut Modellannahme qxK . Die Investitionen I sind jedoch nicht nach oben beschränkt. Daher muss McKelvey also Puls-Investitionen zulassen. Aus der Maximierungsbedingung folgt

$$h = \begin{cases} 0 & \text{falls } p < w(x) + \lambda, \\ qxK & \text{falls } p > w(x) + \lambda, \end{cases}$$

und

$$I = \begin{cases} 0 & \text{falls } \mu < c, \\ \infty & \text{falls } \mu > c. \end{cases}$$

An dieser Stelle ist noch unbestimmt, auf welches Niveau der Kapitalstock K bei Puls-Investitionen jeweils angehoben werden soll. Bei McKelvey (1986) findet sich kein Hinweis hierzu, in den früheren Arbeiten wird jedoch in etwa die folgende Überlegung angestellt (Clark et al. 1979; McKelvey 1985). Sie geht von einer stückweise stetigen Trajektorie für den Kapitalbestand K mit den Sprungstellen $t_0 < t_1 < \dots < t_n$. An jeder Sprungstelle t_i sei $\Delta K_i := \lim_{\tau \rightarrow t_i^+} K(\tau) - \lim_{\tau \rightarrow t_i^-} K(\tau) > 0$. Zwischen den Sprungstellen genügt die Funktion der Differentialgleichung $\dot{K} = -\delta K$, da hier $I = 0$ ist. Eine solche Trajektorie kann man als verallgemeinerte Lösung der Differentialgleichung (3.3) auffassen, bei der K nur stückweise stetig ist. Dadurch kann das Funktional Π in Abhängigkeit von ΔK_i , $i = 0, \dots, n$ berechnet werden, um es einer Maximierung zugänglich zu machen. McKelvey konzentriert sich jedoch zunächst auf die Untersuchung des Gleichgewichtszustandes, um dann die Dynamik des Modells am Beispiel des Walfanges zu erläutern (siehe Abb. 5.7 auf S. 93).

3.4 Modellkritik

Einige Kritikpunkte am einfachen Fischereimodell und McKelveys Modell wurden bereits angerissen. Wichtige Punkte werden an dieser Stelle zusammengefasst und gründlicher ausgeführt, insbesondere sofern sie zur Entwicklung des Modells myopischer Ressourcennutzung in Kapitel 5 beigetragen haben. Dabei wird zunächst auf die Modelle einzeln eingegangen.

Zum einfachen Fischereimodell (Abschnitt 3.3.2) lassen sich zunächst mathematische Einwände bezüglich des abgeleiteten Differentialgleichungssystems, der Wahl der Anfangswerte und dem Problem des unendlichen Zeithorizontes formulieren.

Das verwendete Maximumprinzip von Pontryagin (siehe Abschnitt 5.2.1) liefert nur *notwendige* Bedingungen an optimale Lösungen. Sollen die Verhaltensgleichungen *hinreichend* für Optima sein, müssen daher stärkere Theoreme verwendet werden. Insbesondere muss die Existenz optimaler Lösungen gesichert sein. Dies berührt auch das Problem des unendlichen Zeithorizontes. Zwar erscheint es zunächst angebracht, $T \rightarrow \infty$ gehen zu lassen, da somit keine willkürliche Festlegung des Zeithorizontes erfolgen muss. Viele bekannte Theoreme machen in diesem Fall jedoch keine Aussagen.

Beschränkt man sich auf endliche Zeithorizonte, bleibt immer noch die Wahl des Anfangswertes $h(0)$ offen. Das Phasendiagramm (vgl. Abb. 3.2) skizziert Trajektorien in Abhängigkeit von diesem Wert. Welche dieser Trajektorien jedoch mehr zum Gesamtgewinn beiträgt, bleibt in den angeführten Darstellungen offen bzw. wird lediglich plausibilisiert.

Es stellt sich jedoch die Frage, ob eine gründlichere mathematische Untersuchung lohnt, da weitere Einwände vorzubringen sind. Der modellierte, besonders „günstige“ Fall exklusiver Eigentumsrechte mag als Maßstab zum bewertenden Vergleich mit anderen Fällen geeignet sein, ist in der Praxis jedoch gerade nicht anzutreffen. Die Problembeschreibung der Übernutzung mariner Ressourcen macht deutlich, dass gerade Fischerei unter Konkurrenz untersucht werden sollte (siehe Abschnitt 3.2). Darüber hinaus ist zu bezweifeln, dass Gewinne nur von der Ernte abhängen, und nicht etwa auch vom Bestand. Insbesondere wenn er sehr weit abgesunken ist, muss mehr Aufwand getrieben werden, um die letzten Individuen zu finden. Im Modell gibt es kein *feedback* vom Bestand auf die Ernte, sondern nur von der Ernte auf den Bestand. Dies sieht man auch direkt im Phasendiagramm, da es möglich ist, dass die Ernte mit sinkendem Bestand nahe der Ausrottung noch steigt (vgl. Abb. 3.2).

Auch die Kritik an McKelveys Modell (Abschnitt 3.3.3) kann nach der methodischen und der inhaltlichen Seite gegliedert werden. Abgesehen von den Schwierigkeiten, die sich aus der Annahme eines unendlichen Zeithorizontes ergeben, zeigt sich, dass das angeführte Theorem von Mangasarian zur Lösung der Optimierungsaufgabe nicht angewandt werden kann. Zum einen macht auch dieses nur Aussagen für endliches T , setzt aber zusätzlich voraus, dass alle beteiligten Funktionen stetig differenzierbar und konvex in allen Komponenten sind. Aufgrund der Modellannahmen sind allerdings weder I noch K notwendig stetig (vgl. Def. 3.2), und die Funktion $f(x) := F(x) - Nh$, die die Differentialgleichung für x liefert, ist konkav, da die Regenerationsfunktion F konkav ist (vgl. S. 47). Daher können die Verhaltensgleichungen (vgl. Gleichungen (3.3)) nicht auf die angeführte Weise abgeleitet werden. Eine schlüssige Herleitung ist jedoch mit größerem Aufwand verbunden, da zugleich die durch die Puls-Investitionen auftretenden Probleme gelöst werden müssen.

Die Dynamik des Modells wurde nur ansatzweise am Beispiel des Walfangs untersucht. Es wird versucht, einen Einzelfall mit numerischen Methoden zu rekonstruieren. Die genaue Vorgehensweise, etwa die Wahl der Parameter oder die Ermittlung der Anfangswerte, bleibt jedoch unklar:

Non-equilibrium characteristics are obtained by numerical integration of the differential system [...] working backwards from equilibrium at $t = \infty$. The results are shown graphically in phase-plane portraits, and key features, such as initial pulse investment K_{max} , and lowest whale stock level x_{min} , read off the curves. (McKelvey 1986)

Die in diesem Zitat angedeutete Methode wird vermutlich aufgrund der Probleme mit Puls-Investitionen gewählt. Dies ist insofern bedauerlich, als Puls-Investitionen aufgrund linearer Investitionskosten auftreten, was eigentlich zur Vereinfachung des Modells angenommen wurde. Auch die ökonomische Interpretation der Puls-Investitionen ist zweifelhaft, da Fangkapazitäten erst aufgebaut werden müssen und nicht in kurzer Zeit in großem Umfang ausgeweitet werden können. Genau an der Stelle der Anfangsinvestitionen werden auch die Daten des Walfangs durch das Modell schlecht rekonstruiert (vgl. Abb. 5.7 auf S. 93) Es gelingt lediglich den Bestand zu finden, bei dem die Fangkapazitäten zusammenbrechen.

Andere Annahmen tragen erfolgreicher zur Vereinfachung der Ergebnisse bei, so die Unabhängigkeit der Erntekosten vom Kapitalbestand und die konstanten Preise. Man sieht jedoch, dass diese Annahmen in erster Linie erfolgen, um überhaupt Ergebnisse erzielen zu können. Die übliche analytische Methode stößt schnell an ihre Grenzen, obwohl die damit angestrebte Allgemeinheit der Aussagen sicher ein wichtiges Anliegen ist. Dies ist in Kapitel 5 ein wichtiger Grund zur Verwendung qualitativer Differentialgleichungen.

An McKelveys Modell ist auf der anderen Seite zu würdigen, dass es etwa gegenüber dem einfachen Fischereimodell bestandsabhängige Erntekosten berücksichtigt, und sich nicht auf den Fall exklusiver Eigentumsrechte oder vollkommener Konkurrenz beschränkt. Die besondere Leistung liegt jedoch darin, ein Modell vorzulegen, mit dem die Auswirkungen des Kapitalbestandes und irreversibler Investitionen auf die Übernutzung nachwachsender, mariner Ressourcen ansatzweise untersucht werden können.

Allgemeiner lassen sich die Schwächen bestehender bioökonomischer Modelle nach folgenden Punkte gliedern:

- Mathematische Probleme
- Vereinfachende Annahmen
- Mangelnde Untersuchung der Dynamik
- Fehlende Berücksichtigung von Unsicherheit

Die mathematischen Probleme betreffen insbesondere das Auffinden hinreichender Kriterien an optimale Lösungen und die Existenz des Integrals, welches die Zielfunktion bestimmt. Außerdem stellt sich heraus, dass manche Modellannahmen zu allgemein sind, um zu analytischen Ergebnissen zu kommen. Numerische Methoden werden kaum angewandt, sind aber auch insofern problematisch, als allgemeinere Aussagen hier schwerer zu gewinnen sind. Diesem Problem versucht man durch vereinfachende Annahmen zu begegnen, was in der Regel zu Grenzfällen führt, die die empirische Relevanz des Modells reduzieren. Außerdem wurde gezeigt, dass solche Vereinfachungen nicht immer zu methodisch stichhaltigeren Ergebnissen führen.

Unabhängig von diesen Einwänden bleiben die Modelle meist noch hinreichend kompliziert, um eine Untersuchung der Dynamik des Systems beträchtlich zu erschweren oder auf die Analyse des Phasenraumes zu beschränken. Der Schwerpunkt der Modelle liegt daher - neben der Stabilitätsanalyse - auf der Abhängigkeit des Gleichgewichtszustandes von Parametern. Dabei ist durchaus anzuzweifeln, dass gleichgewichtige Zustände für das Problem der Übernutzung von Bedeutung sind, da sich das System die meiste Zeit nicht im Gleichgewicht befindet.

Bislang nur angedeutet wurde die Bedeutung von Unsicherheiten im Wissen über Daten und Zusammenhänge, welche in Kapitel 4 einer näheren Analyse unterzogen werden. Schon Gordon (1954) führt an, dass die Entwicklung von Fischbeständen - auch ohne menschlichen Einfluss - schwierig vorherzusehen ist. Dies ist zum einen in unvollständigem Wissen bezüglich der betroffenen Spezies begründet, zum anderen in Unsicherheiten bezüglich der zukünftigen Entwicklung (etwa aufgrund der Wetterverhältnisse). Ähnliches gilt für die ökonomische Seite des Phänomens. Wenn die Expansion eines Fischerei-Unternehmens aus dessen Gewinnen erklärt wird, müssen Daten über dessen Erträge und Fangkosten vorliegen. Diese unterliegen in der Regel der Geheimhaltung, um etwa die Einflussnahme von Steuerbehörden oder der Konkurrenz zu vermeiden. Gleiches gilt für die technischen Daten der Fangeinrichtungen, Entwicklung von Preisen etc. (Clark 1981).

Von dieser Kritik gehen wesentliche Impulse für die Entwicklung des Modells myopischer Ressourcennutzung in Kapitel 5 aus. Sollen bioökonomische Modelle hilfreiche Hinweise zum Management bedrohter mariner Ressourcen geben, so müssen sie auch die bestehenden Unsicherheiten berücksichtigen. Außerdem wird angestrebt, mit weniger vereinfachenden Annahmen dennoch allgemeine Aussagen über die Dynamik eines bioökonomischen Systems zu machen, in welchem irreversible Investitionen in Fangkapazitäten von Bedeutung sind. Dies sind wichtige Gründe, aus denen in Kapitel 5 die in Kapitel 2 vorgestellte Theorie qualitativer Differentialgleichungen verwendet wird.

Kapitel 4

Modellierung unter Unsicherheit

So wird eine flüchtige Spur im gestaltlos zerfließenden Wasser, sonst das sprichwörtliche Sinnbild der Vergänglichkeit, für den Jäger, der sie klug zu deuten versteht, zum zuverlässigen Wegweiser;

Herman Melville, Moby Dick

In Kapitel 3 wurde erläutert, dass das Wissen über wichtige Daten und Zusammenhänge in bioökonomischen Modellen oft unsicher ist. Gleichzeitig besteht häufig ein Handlungsdruck, z.B. die Übernutzung mariner Ressourcen zu verhindern, weswegen eine sichere Wissenslage nicht abgewartet werden kann. Numerische Simulationen sind jedoch nur möglich, wenn Parameter und Funktionen exakt spezifiziert sind, weswegen man oft auf Vermutungen angewiesen ist.

Um die genannte Problemlage in der weiteren Modellbildung berücksichtigen zu können, wird in diesem Kapitel aus allgemeinerer Perspektive untersucht, welche Arten von Unsicherheit für bioökonomische Modelle bedeutsam sind, welche Anforderungen daher an die Auswahl der mathematischen Methoden zu stellen sind, und welche Konsequenzen sich ansonsten für den Modellierungsprozess ergeben. Die Untersuchung führt zur These, dass *Wissen immer nur in Bezug auf ein Modell unsicher* ist. Sie wird verständlich, wenn man die Bedeutung von Zielen in der Modellbildung (siehe Abschnitt 4.1) und für den Begriff des unsicheren Wissens (siehe Abschnitt 4.2) herausarbeitet.

Dadurch wird zugleich ein konzeptioneller Rahmen gewonnen, in dem ein Modell myopischer Ressourcennutzung entwickelt werden kann (siehe Kapitel 5). Das Kapitel schließt mit einer Argumentation für die Verwendung qualitativer Differentialgleichungen in der mathematischen Bioökonomik bzw. zur Modellierung unter Unsicherheit.

4.1 Zielsetzungen in der mathematischen Modellbildung

In mathematischen Modellen sind Zielsetzungen insbesondere auf drei Ebenen bedeutsam. Zunächst geht die Darstellung von Stachowiak (1973) aus, der sich darum bemüht, den

Modellbegriff allgemein zu erfassen. Er bestimmt Modelle als Repräsentationen und bezeichnet das Repräsentierte als **Original**. Zugleich weist er auf das *pragmatische Merkmal* von Modellen hin, da die Repräsentation des Originals immer von Subjekten hergestellt wird, die auf einen Modellzweck hin Operationen am Modell durchführen. Er definiert den allgemeinen Modellbegriff folgendermaßen:

BEZEICHNUNG: Die fünfstellige **Modellrelation** (X, Y, k, t, Z) ist erfüllt, wenn X ein Modell des Originals Y für den Verwender k in der Zeitspanne t bezüglich der Intention Z ist.

Dabei werden sowohl Modell als auch Original als prädikatenlogisch ausdrückbare Systeme, letztlich also als formalisierbare Relationengebilde, aufgefasst. Es wird also angenommen, dass das zu Modellierende (das Original) bereits wie ein Modell strukturiert ist (auch wenn die Struktur vielleicht nicht bekannt ist). Obwohl Zwecksetzungen in der Definition bereits genannt sind, macht diese Annahme auf eine grundlegendere Ebene aufmerksam. Die Identifikation eines Teils der Wirklichkeit mit einem System ist nämlich bereits problematisch, da nicht davon ausgegangen werden kann, dass dieser Teil „system-artig“ strukturiert ist. Vielmehr handelt es sich bei einer derartigen Strukturierung um eine Ordnungsleistung, die erst subjektseitig vollzogen wird (Kant 1781). So machen Rorty (1989) und Goodman (1984) darauf aufmerksam, dass Beschreibungen nicht unabhängig von einem (sprachlichen) Vokabular bzw. einem Beschreibungssystem als wahr oder falsch aufgefasst werden können. Die Bezeichnung des Ergebnisses der Problembeschreibung als Original des Modells ist daher etwas irreführend. Statt dessen wird ein innerhalb eines Beschreibungsrahmens gebildetes System hier **Modellfokus** genannt, da es einen strukturierten, begrifflich scharfen Blick auf das Problem erlaubt. In der Problembeschreibung bzw. Bildung des Modellfokus, die als Bestandteil des Modellierungsprozesses aufzufassen sind, werden jedoch bereits Modellziele wirksam (Rodin, Murthy, and Page 1990; Deppert and Theobald 1998). Ihre Bedeutung liegt in der Auswahl des Beschreibungssystems und der Vorstrukturierung des Problems.

Die Zielsetzung wird zweitens im *Verkürzungsmerkmal* von Modellen deutlich (Stachowiak 1973). Wenn sowohl der Modellfokus als auch das Modells als System aufgefasst werden, können beide in Relation gesetzt werden, indem eine Teilmenge des Fokus auf eine Teilmenge des Modells abgebildet wird. Es wird also nicht verlangt, dass das Modell alle Eigenschaften des Fokus repräsentiert (d.h. abbildet). Die Auswahl des Fokus ist aber nicht von den Zielen der Modellbildung zu trennen. Im bioökonomischen Kontext bilden die Ressourcen und Unternehmen mit ihren Eigenschaften den Fokus der Modellrelation, die mit mathematischen Objekten und Funktionen in Bezug gesetzt werden. Dabei korrespondieren einige mathematische Eigenschaften zu Eigenschaften des Fokus (z.B. die Konkavität von Gewinnfunktionen zum ökonomischen Ertragsgesetz, das für das Investitionsverhalten von Fischerei-Unternehmen wesentlich ist). Zugleich kommen neue Eigenschaften hinzu (wie die Differenzierbarkeit des Ressourcenbestandes nach der Zeit), und es werden nicht alle Eigenschaften abgebildet (etwa die Farbe der Schiffe, die für die Übernutzungsproblematik irrelevant ist).

Drittens erwartet man von einem Modell Hinweise zum Umgang mit einem speziellen Problem, hier der Übernutzung einer marinen Ressource. Diese eingeschränkte Allgemeinheit von Modellen wird durch die Bedeutung von Fallstudien in der ökologischen Modellierung deutlich (Shrader-Frechette and McCoy 1993). Um aussagekräftige Ergebnisse zu

erhalten, ist es daher notwendig, dass die Modellannahmen und die gewählten mathematischen Methoden, mit denen sie formuliert werden, zieladäquat sind. Wird etwa angestrebt, die Größe der Erntemenge in einer Fischereiwirtschaft vorherzusagen, muss die Methode mit numerischen Werten arbeiten. Fragt man sich dagegen, ob die Erntemenge zu- oder abnimmt, sind numerische Informationen nicht zwingend notwendig.

Diese Argumente legen es nahe, das Modellziel als die entscheidende pragmatische Komponente eines Modells anzusehen. Damit kann im nächsten Abschnitt präzisiert werden, was unter unsicherem Wissen zu verstehen ist.

4.2 Der Begriff der Unsicherheit

In diesem Abschnitt wird begründet, warum Wissen immer nur relativ zu einem Ziel unsicher ist. Da im letzten Abschnitt auch die Bedeutung von Zielen für den Modellierungsprozess gezeigt wurde, ergibt sich daraus eine Perspektive zur Modellierung unter Unsicherheit.

Kemke (1991) unterscheidet zwischen *ungenauem* und *unvollständigem* Wissen. *Ungenaues* Wissen wird auch als vages Wissen bezeichnet und bezieht sich auf die in Aussagen verwendeten Begriffe. So stellt der Ausdruck „Der Fischbestand ist gering“ eine vage Aussage dar, da das Prädikat „ist gering“ keine scharfe, allgemeine Definition besitzt. Dies soll hier nicht weiter betrachtet werden. *Unvollständiges Wissen* liegt dagegen vor, wenn die Gültigkeit einer Aussage nicht mit Sicherheit festgestellt werden kann, was dann in hypothesenhaften Formulierungen wie „Der Fischfang ist vermutlich doppelt so hoch wie der maximale nachhaltige Ertrag“ zum Ausdruck kommen kann. Häufig liegen in einem solchen Fall wenigstens begründete Hypothesen vor, die die Gültigkeit der Aussage eingrenzen (Kemke 1991; Spies 1993). So könnte immerhin sicher sein, dass der Fischfang über dem maximalen nachhaltigen Ertrag liegt.

Es gibt verschiedene Versuche, Arten der Unsicherheit weiter zu klassifizieren. Als Ordnungsmerkmal bieten sich die Ursachen der Unsicherheit an. Rowe (1994) schlägt folgende vier Klassen vor:

1. Metrische: Daten fehlen bzw. erlauben keine exakte Einordnung in die verwendete Skala.
2. Strukturelle: Komplexität oder Unkenntnis von Zusammenhängen verlangt vereinfachende Annahmen.
3. Zeitliche: Zukünftige Umstände entziehen sich der sicheren Kenntnis. Dies gilt auch für die Rekonstruktion vergangener Verhältnisse.
4. Kommunikative: Bei der Präsentation von Ergebnissen führen verschiedene Sichtweisen, wissenschaftliche Hintergründe, Ziele und Werturteile der Beteiligten zu Unsicherheiten in der Kommunikation.

In der letzten Klasse wird bereits der Übergang zum Problem des vagen Wissens deutlich. Sie verweist außerdem auf eine von Zimmermann (1997) angeführte Unterscheidung zwischen subjektiver Unsicherheit, die relativ zu einzelnen Personen, und objektiver Unsicherheit, die in der Sache begründet ist. Diese Unterscheidung ist wesentlich für die pragmatische Dimension des Modell- wie des Unsicherheitsbegriffs. Subjektive Unsicherheit hängt

nach Zimmermann nicht nur davon ab, welche Informationen einem Subjekt zur Verfügung stehen, sondern auch, was es beschreiben, vorhersagen oder präskribieren will, d.h. *wofür* ein Subjekt das Modell benötigt. Gemeinsam mit den Ergebnissen zu Zielsetzungen in der Modellbildung kann damit die eingangs aufgestellten These, dass Wissen immer nur in Bezug auf ein Modell unsicher ist, formuliert werden.

BEZEICHNUNG: Wissen ist **unsicher** in Bezug auf ein mathematisches Modell, wenn es nicht hinreichend ist, das Ziel des Modells zu erreichen.

Diese Präzisierung des Begriffs der Unsicherheit zeigt, dass das Vorliegen von Unsicherheit nicht unabhängig von Subjekten ist, aber auch, dass es kein *ausschließlich* subjektiver Zustand ist. Vielmehr ist entscheidend, ob die verfügbaren Daten hinreichend für das Modellziel sind. In diesem Fall kann mit obiger Definition nicht von Unsicherheit gesprochen werden. So könnte es reichen, Messergebnisse nicht metrisch, sondern ordinal zu skalieren. Es kann passieren, dass die gewählten Methoden nicht zieladäquat sind, da dadurch erst Unsicherheiten entstehen. Damit löst sich auch die zunächst paradoxe Formulierung „Unsicheres Wissen“ auf. Ist etwa bekannt, dass der Bestand einer marinen Ressource zunimmt, liegt definitiv Wissen vor. Dieses ist unsicher, wenn man die genaue Bestandsgröße wissen will. Soll dagegen untersucht werden, ob das Management zur Vermeidung der Übernutzung einer Ressource wirksam ist, ist diese Aussage bereits hinreichend.

Zur Behandlung von Unsicherheit in mathematischen Modellen ist daher entscheidend, dass Modellziele und -methoden aufeinander abgestimmt sind. Diese Feststellung ist nicht trivial, denn stattdessen könnte auch gefordert werden, bessere oder zusätzliche Daten zu erheben. Verschiedene Gründe können jedoch dagegen sprechen. Beispielsweise können technische Schwierigkeiten die Bestimmung von Größen oder Zusammenhängen so stark erschweren, dass aufgrund zu hoher Kosten oder eines zu knappen Zeitrahmens darauf verzichtet werden muss. Nicht zuletzt können problemimmanente Ursachen, wie etwa die Geheimhaltung von Unternehmensdaten über Investitionskosten, vorliegen.

4.3 Konsequenzen für die Modellbildung in der Bioökonomik

Für die Bioökonomik folgen aus den allgemeineren Untersuchungen zum mathematischen Modell (vgl. Abschnitt 4.1) Arbeitsschritte, die in der Modellbildung durchgeführt werden müssen. Zugleich liefert die Definition der Unsicherheit (vgl. Abschnitt 4.2) weitere Hinweise zur Auswahl von Methoden und Modellzielen in der Bioökonomik, die unsicheres Wissen berücksichtigen sollte. Beides wird im Folgenden ausgeführt.

Der Modellierungsprozess umfasst folgende Arbeitsschritte, deren Reihenfolge für die Aufstellung des Modells myopischer Ressourcennutzung im Kapitel 5 maßgeblich ist. Es werden bereits dessen Aufbau und einige Qualitätskriterien angedeutet.

1. **Problembeschreibung und Zielsetzung:** Das Ziel wird aus dem Ausgangsproblem formuliert. Dies beinhaltet die Festlegung auf einen Beschreibungsrahmen.

Die Problembeschreibung für das Modell myopischer Ressourcennutzung ist im wesentlichen schon in Abschnitt 3.2 geleistet worden. Zur dort gestellten Frage nach

dem Management mariner Ressourcen kommt als weiteres Ziel die Verbesserung der bestehenden Modelle hinzu.

2. **Mathematische Methoden:** Sie müssen Zieladäquat ausgewählt werden, das Modell beschreiben, und mit ihm operieren können.

Aus den unten zusammengefassten Gründen werden in Kapitel 5 qualitative Differentialgleichungen und analytische Methoden verwendet.

3. **Modellannahmen:** Formulierung von (zieladäquaten) Aussagen zu Bildung des Modellfokus und des Modells (Annahmen) mithilfe des Beschreibungsrahmens und der mathematischen Methoden. Dabei wird eine Relation zwischen dem Modell und dem Fokus hergestellt. Die Annahmen müssen sowohl bezüglich des Fokus als auch des Modells (mit deren Beschreibungsrahmen bzw. Methoden) schlüssig sein.

Im zu erstellenden Modell werden die Annahmen zur marinen Ressource und ihrer Bewirtschaftung formalisiert, wie sie in Abschnitt 3.3.1 systematisiert wurden.

4. **Mathematische Analyse:** Das Modell wird mit den mathematischen Methoden untersucht.

Die Annahmen des Modells myopischer Ressourcennutzung führen zu einem Optimierungsproblem, welches zuerst analytisch behandelt und dann zu einer QDGL abstrahiert und gelöst wird.

5. **Interpretieren und Bewerten:** Die Ergebnisse der mathematischen Analyse werden interpretiert und bzgl. des Beschreibungsrahmens und des Ziels überprüft.

Die in Kapitel 5 gewonnene qualitative Lösung wird u.a. auf empirische Relevanz und Implikationen für das Management untersucht.

Es sei angemerkt, dass eine Systematik dieser Art nicht als strenges Ablaufschema zu verstehen ist. Zum einen kann sie beliebig verfeinert werden; zum anderen führt sie lediglich Punkte auf, die bei der Modellbildung berücksichtigt werden müssen, ohne Aussagen über deren Reihenfolge zu machen.

Zur Wahl geeigneter mathematischer Methoden gliedern Morgan and Henrion (1990) metrische Unsicherheit in weitere Typen auf, von denen einige in bioökonomischen Modellen vorkommen. So repräsentieren **empirische Größen** zumindest prinzipiell messbare Eigenschaften des modellierten Systems (im Beispiel etwa der Ressourcenbestand x). Hier können bei Unsicherheit probabilistische Methoden angemessen sein, da vom *wahrem* Wert der Größe gesprochen werden kann. Im Gegensatz dazu hängt der Wert von **Entscheidungsvariablen** von der Wahl durch Entscheidungsträger ab. Die Unsicherheit resultiert hier aus der Frage, welche Entscheidung die *beste* für den Akteur ist (z.B. die optimale Erntemenge h). In der Regel werden zur mathematischen Modellierung von Unsicherheit statistische Methoden vorgeschlagen. Die Analyse von Morgan und Henrion macht jedoch deutlich, dass dies nicht hinreichend ist, um alle Arten von Unsicherheit zu behandeln. Ein weiterer Kritikpunkt an der ausschließlichen Verwendung statistischer Methoden sind die dort benötigten Wahrscheinlichkeitsmodelle. Sie erfordern weitere Annahmen, die ebenfalls mit Unsicherheit behaftet sein können (Ben-Haim 1997).

Andere Ansätze sind Szenario- bzw. Sensitivitätsanalysen. Hier können verschiedene, aufgrund der Unsicherheit bestehende Möglichkeiten untersucht werden. Solche Verfahren benötigen jedoch quantitative Daten, die u.U. ad hoc festgelegt werden müssen. Insbesondere gegenüber mathematischen Laien besteht dann die Gefahr, dass quantitative Ergebnisse als sicherer eingeschätzt werden als sie sind. Daher sollten in Bereichen, bei denen Unsicherheiten vorliegen, auch qualitative Daten verwendet werden (Knauer 1992).

Wenn in einem konkreten Fall das Wissen nicht zur Berechnung der Modellergebnisse ausreicht, kann dieses Problem mit der vorgeschlagenen Definition von unsicherem Wissen evtl. als Scheinproblem identifiziert werden. Angenommen, alle Daten zur Lösung des Modells lägen vor, so könnten die Modellergebnisse möglicherweise mehr aussagen, als zur Erreichung des Modellziels notwendig ist. In diesem Fall sollte man versuchen, ein anderes Modell (mit anderen Annahmen und Methoden) zu erstellen, welches ebenfalls noch zieladäquat ist, mit dem *tatsächlich* vorliegenden Wissen aber lösbar ist. Soll mit einem Modell beispielsweise untersucht werden, ob durch eine bestimmte politische Maßnahme Überkapazitäten in einer Fischereiwirtschaft abgebaut werden können, muss das Ausmaß des Abbaus nicht notwendigerweise exakt beziffert werden, da es vielmehr auf die Änderungsrichtung der Überkapazitäten ankommt.

Dass qualitative Differentialgleichungen hier ein geeignetes methodisches Konzept sind, wird im Modell myopischer Ressourcennutzung in Kapitel 5 dargestellt. Auf diese Weise können metrische und strukturelle Unsicherheiten aufgelöst werden, was bei ausschließlicher Verwendung gewöhnlicher Differentialgleichungen nicht möglich ist. Dies ist zieladäquat, da man sich oft nur für Entwicklungsrichtungen bestimmter Größen interessiert. Mit QDGL werden sowohl quantitative Größen als auch strukturelle Zusammenhänge so abstrahiert, dass verschiedene mögliche Fälle hinsichtlich ihrer Monotonieeigenschaften zusammengefasst werden, ohne Parameter oder Funktionen willkürlich festlegen zu müssen.

Kapitel 5

Ein Modell myopischer Ressourcennutzung

[...] in früheren Jahren, etwa am Ende des achtzehnten Jahrhunderts, sei man viel öfter kleinen Rudeln dieser Leviathane begegnet als jetzt, weshalb die Fangreisen sich weniger lange hingezogen, dafür aber um so mehr verlohnt hätten.

Herman Melville, Moby Dick

Die Entwicklung des Modells myopischer Ressourcennutzung in diesem Kapitel richtet sich nach den allgemeineren Betrachtungen des Kapitels 4. Demgemäß werden zuerst Problembeschreibung, Ziele und Methoden des Modells geklärt. Sodann werden durch formale Definitionen Modellfokus und Modellannahmen) spezifiziert. Dem folgt die mathematische Analyse der Annahmen. Bis zu diesem Punkt ist das Modell methodisch stark an das in Kapitel 3 referierte Vorgehen angelehnt. Dessen Kernstück ist das Maximumprinzip von Pontryagin, welches hier in einem Exkurs vorgestellt und in einer Variante angewendet wird. Damit erhält man eine DGL, die bei metrischer und struktureller Sicherheit (vgl. Abschnitt 4.2) die Modelldynamik beschreiben würde. In Abschnitt 3.4 wurde jedoch gezeigt, dass unsicheres Wissen für das Problem der Übernutzung von großer Bedeutung ist. Kapitel 4 machte außerdem deutlich, dass Unsicherheit immer relativ zu den Zielen und Methoden eines Modells vorliegt und qualitative Differentialgleichungen im bioökonomischen Kontext eine viel versprechende Methode sind. Die genau zu umreißenden Ziele des Modells gestatten es, die DGL gemäß der Theorie des Kapitels 2 zu einer QDGL zu abstrahieren. Das Ergebnis ist ein qualitatives Modell myopischer Ressourcennutzung, welches alle möglichen Dynamiken des Systems liefert. Die Ergebnisse der Analyse werden mit anderen Modellen verglichen, sowie auf einen empirischen Datensatz und auf fischereipolitische Fragen hin interpretiert. In diesem Kapitel werden der Übersicht halber wieder Indices zur Notation partieller Ableitungen benutzt.

5.1 Voraussetzungen des Modells

5.1.1 Problembeschreibung und Ziele des Modells

Eine ausführliche Beschreibung des Problems der Übernutzung mariner Ressourcen wurde bereits in Abschnitt 3.2 vorgenommen. Motivierend für das qualitative Vorgehen sind die unbefriedigenden Annahmen und Ergebnisse der in Kapitel 3 referierten Modelle. Die ökonomisch schlecht begründbaren und mathematische Probleme aufwerfenden Puls-Investitionen sollen durch fundiertere Annahmen ersetzt werden, die Dynamik ausführlicher untersucht, sowie strukturelle und metrische Unsicherheiten berücksichtigt werden (siehe Abschnitte 3.4 und 4.2).

Die Ziele des zu erstellenden Modells fächern diejenigen Fragestellungen der gesamten Arbeit auf, die sich auf das Problem der Übernutzung beziehen (vgl. Kapitel 1):

- Welche typischen Entwicklungsmuster - insbesondere nachhaltige und problematische - können bei einer abgeschlossenen Konkurrenzfischerei auftreten?
- Wie verändert die Berücksichtigung von Fangkapazitäten das Systemverhalten gegenüber einfacheren Modellen?
- Welche Konsequenzen hat es für das System, wenn keine Puls-Investitionen möglich sind?
- Lassen sich durch ein verbessertes Modell empirische Entwicklungsmuster rekonstruieren?
- Was bedeutet die Berücksichtigung von Fangkapazitäten für die Evaluation von Management-Optionen?

5.1.2 Auswahl der Methoden

Die Bestandsentwicklung der Ressource wird populationsdynamisch beschrieben, die Fangentscheidung mikroökonomisch begründet, und für die Investitionsentscheidung wird auf kapitaltheoretische Konzepte zurückgegriffen.

Die Modellannahmen werden zunächst mit analytischen Methoden definiert. Dies unterstellt, dass das Modell zumindest prinzipiell durch reelle Zahlen und Funktionen darstellbar ist. Die Parameter bleiben aber unbestimmt, und Funktionen werden so allgemein wie möglich gehalten, um lediglich zielrelevante Aspekte des Modellfokus abzubilden und möglichst viele Einzelfälle abzudecken.

Die dadurch gewonnene mathematische Beschreibung führt auf ein Problem der dynamischen Optimierung. Methoden für dessen Lösung werden in Abschnitt 5.2.1 eingeführt. Man erhält ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem, von dem jedoch nur gewisse Eigenschaften verlangt werden (insbesondere zur Monotonie der auftretenden Funktionen). Genau genommen hat man es daher mit einer Menge von Differentialgleichungen zu tun.

In Kapitel 4 wurde ausgeführt, dass deren Untersuchung durch Szenarioanalysen metrische und strukturelle bzw. Entscheidungsvariablen betreffende Unsicherheiten nur scheinbar beseitigt. In Abschnitt 3.4 wurde jedoch gezeigt, dass Unsicherheit ein inhärentes Merkmal bioökonomischer Probleme ist. Daher werden aus den in Abschnitt 4.3 genannten

Gründen die in Kapitel 2 vorgestellten qualitativen Differentialgleichungen verwendet. Diese erlauben es, die Zusammenhänge nicht viel weiter spezifizieren zu müssen, als es bereits durch die Modellannahmen erfolgt. Zugleich ist man dabei nicht auf eine Auswahl von Szenarien angewiesen, da alle mit den Annahmen verträglichen Dynamiken gewonnen werden. Daher wird das analytisch gewonnene Differentialgleichungssystem in Abschnitt 5.3 zu einer QDGL abstrahiert.

5.1.3 Modellannahmen

Populationsdynamik

Das Modell betrachtet eine nachwachsende marine Ressource, die durch ihren Bestand x charakterisiert wird, auf den sich der Fang h durch Fischerei-Unternehmen auswirkt. Sowohl Bestand als auch Fang sind Funktionen auf dem Intervall $J := [0, T]$, welches das Planungsintervall des Modells beschreibt; T bezeichnet den Zeithorizont des Modells. Die Ressource wird weiterhin durch eine Regenerationsfunktion F charakterisiert, die jedem Bestand x eine Bestandsänderung - die Regeneration - zuweist (ohne Berücksichtigung des Fanges).

DEFINITION 5.1: Es sei $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare, streng konkave Funktion. Zusätzlich erfülle sie folgende Eigenschaften:

1. Es gilt $F(0) = 0$ und es gibt eine weitere Nullstelle $Q \in \mathbb{R}_+$ von F .
2. Es gibt eine Stelle $x_{MSY} \in [0, Q]$, an der F ihr Maximum annimmt. Das Maximum $F(x_{MSY}) > 0$ werde mit MSY bezeichnet.
3. Auf dem Intervall $[0, x_{MSY}]$ ist F monoton steigend, auf $[x_{MSY}, \infty)$ monoton fallend.

Dann heißt F **Regenerationsfunktion**.

Mit einer Regenerationsfunktion lässt sich logistisches Verhalten beschreiben (vgl. Abschnitt 3.3.1). Der Wert Q ist die Kapazität des Systems. Berücksichtigt man zusätzlich den Fang h als Funktion in der Zeit, erhält man folgende Differentialgleichung:

DEFINITION 5.2: Eine gewöhnliche Differentialgleichung heißt **logistisches System**, wenn sie die Form

$$\dot{x} = F(x) - h \tag{5.1}$$

hat, wobei F eine Regenerationsfunktion ist. Die Inhomogenität $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, und ein Anfangswert $x(0) = x_0$ seien vorgegeben.

Gesucht werden Lösungen dieser Differentialgleichung auf dem Intervall J .

Wirtschaftsweise

Die Ressource wird durch $N \in \mathbb{N}$ Unternehmen bewirtschaftet, die die Ernte an einem gemeinsamen Markt absetzen. Die Unternehmen sind charakterisiert durch ihren Kapitalbestand K , sowie ihre Ernte- und Investitionskosten c^E bzw. c^I (s.u.). Die Ressource ist

abgeschlossen in dem Sinne, dass die bestehenden Unternehmen gerade nur diese eine Ressource bewirtschaften. Die Beschränkung auf eine Ressource ist im Modellziel begründet. Sollte etwa serielle Überfischung untersucht werden, müssten hier andere Annahmen getroffen werden (vgl. Abschnitt 3.2.2).

Die Unternehmen treffen ihre Entscheidungen unabhängig voneinander und zwischen ihnen besteht ein Konkurrenzverhältnis um eine Allmende-Ressource: Eigentumsrechte werden erst durch Entnahme erworben. Die N Unternehmen verkaufen ihre Ernte (evtl. gemeinsam mit Anbietern anderer Ressourcen) auf einem Markt, an dem sie Preisnehmer sind.

Die Zahl N bleibt konstant, d.h. keine Unternehmen treten hinzu bzw. fallen weg. Diese Vereinfachung ist gerechtfertigt, wenn N groß ist, da dies wenig an den Konkurrenzverhältnissen ändert. Durch hinzukommende Unternehmen steigender Kapitalstock würde außerdem bereits in der Zunahme des Kapitals in den bestehenden Unternehmen repräsentiert. Zusätzlich ist mit Eintritts-Hemmnissen zu rechnen: In der industriellen Fischerei können hohe Anfangsinvestitionen notwendig sein, und ein gesetzlich begrenzter Zugang zur Ressource gehört zu den bereits häufig implementierten Management-Maßnahmen.

Zusätzlich gilt eine Homogenitätsannahme, d.h. alle Unternehmen haben gleiche Kostenfunktionen, gleichen Kapitalstock, treffen gleiche Entscheidungen und verfügen über gleiche Informationen. Diese Annahme ist eine vertretbare Approximation, wenn es kein dominierendes Unternehmen gibt, erfolgt aber auch, um die Lösbarkeit des Modells sicherzustellen.

Erlöse und Erntekosten

Erlöse entstehen durch Verkauf der Ernte h zum konstanten Marktpreis p . Die Kosten entstehen durch Entnahme der Ressource bei jedem Unternehmen in Abhängigkeit von dessen Kapitalstock und der Höhe des Ressourcenbestandes. Dabei gelte das Ertragsgesetz. Dies führt zu folgender Definition:

DEFINITION 5.3: Eine **Erntekostenfunktion**

$$\begin{aligned} c^E : \mathbb{R}_+^3 &\rightarrow \mathbb{R}_+, \\ [h, x, K] &\mapsto c^E(h, x, K), \end{aligned}$$

sei zweimal stetig differenzierbar, monoton steigend in h und monoton fallend in x sowie in K . Außerdem sei sie konvex in allen Komponenten.

Mit der Erntemenge steigen die Kosten, da z.B. die Länge der Fangzeit zunimmt und mehr Fisch gelagert, transportiert und evtl. verarbeitet werden muss. Höhere Bestände dagegen senken die Kosten, da z.B. Fahrwege zu ergiebigen Fanggründen verkürzt werden oder Fangtechniken (wie Netze) bei dichterem Bestand eine höhere Ausbeute haben. Kosten sinken auch mit steigendem Kapital, da dann größere Fangkapazitäten (etwa mehr Schiffe), vor allem aber effizientere Fangtechniken (etwa Ortungssysteme) eingesetzt werden können.

Kapitalbestand und Investitionskosten

Der Kapitalbestand K eines Unternehmens genüge folgender Differentialgleichung:

DEFINITION 5.4: Eine gewöhnliche Differentialgleichung der Form

$$\dot{K} = I - \delta K$$

mit Anfangswert $K(0) = K_0$, der Inhomogenität $I : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ und dem Parameter $\delta \in \mathbb{R}_+$, $\delta \leq 1$ heiße **Kapitalsystem**.

Der Kapitalbestand wird durch Investitionen I erhöht, zugleich sinkt er jedoch durch Abschreibungen um einen linearen Anteil δ . Die Annahme $I \geq 0$ drückt die Irreversibilität der Investitionen aus. Die durch Investitionen entstehenden Kosten werden folgendermaßen berücksichtigt:

DEFINITION 5.5: Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion

$$\begin{aligned} c^I : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R}_+, \\ I &\mapsto c^I(I), \end{aligned}$$

für die $c^I(0) = c_I'(0) = 0$ gilt, und die monoton steigend und konvex ist, heiße **Investitionskostenfunktion**.

Investitionskosten steigen überproportional in I , da eine schnellere Erhöhung des (physischen) Kapitals mit höheren Kosten verbunden ist. Dies ist etwa darin begründet, dass Kapital erst produziert werden muss.

Verhalten

Die Unternehmen entscheiden über die Höhe ihrer Ernte h und ihrer Investitionen I . Im Modell müssen daher zwei geeignete Funktionen bestimmt werden. Zum einen wird angenommen, dass die Unternehmen versuchen, durch ihre Entscheidungen den langfristigen Gewinn zu maximieren. Zum anderen berücksichtigt das Modell die Kurzsichtigkeit mancher Entscheidungen durch die Annahme, dass bei der Festlegung der Erntemenge vom langfristig optimalen Verhalten abgewichen wird (myopische Fischerei).

Für die langfristig optimale Entscheidung wird ein Zielfunktional aufgestellt, welches den Gesamtgewinn zum Gegenwartswert beschreibt, der sich aus gegebenen Funktionen h bzw. I ergibt:

DEFINITION 5.6: Gegeben sei ein Intervall $J := [0, T] \subset \mathbb{R}$, zwei stückweise stetig differenzierbare Funktionen $h, I : J \rightarrow \mathbb{R}_+$, ein logistisches System und ein Kapitalsystem sowie Anfangswerte x_0 bzw. K_0 für diese Systeme. Ferner seien $x, K : J \rightarrow \mathbb{R}_+$ Lösungen dieser Systeme mit den gegebenen Anfangswerten und den Funktionen h, I als Inhomogenitäten. Außerdem sei die Diskontrate $r \in \mathbb{R}_+$, der Preis $p \in \mathbb{R}_+$, die Erntekostenfunktion c^E , und die Investitionskostenfunktion c^I gegeben. Dann heißt das Funktional

$$\begin{aligned} \Pi : C_\pi^1(J, \mathbb{R}_+) \times C_\pi^1(J, \mathbb{R}_+) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \Pi(h, I) &:= \int_J e^{-rt} [ph - c^E(h, x, K) - c^I(I)] dt \end{aligned}$$

Zielfunktional.

Zur Definition ist festzuhalten, dass der Gewinn zu einem Zeitpunkt $t \in J$ aus den Erlösen der Ernte h zum Marktpreis p resultiert, von dem die jeweiligen Ernte- und Investitionskosten abgezogen werden. Zukünftige Gewinne werden dabei mit der Diskontrate r abgezinst.

Es wird angenommen, dass jedes Unternehmen seine langfristige Planung so auslegt, dass Π maximal wird. Investitionsentscheidungen folgen einem langfristigen Kalkül, da Anschaffungen, die über mehrere Jahre die Rahmenbedingungen eines Unternehmens prägen, ein entsprechend gründlicher Planungsprozess vorausgehen dürfte.

Eine andere Situation liegt bei der Fangentscheidung vor, die aus Sicht des Einzelunternehmers eine geringere Tragweite hat. Sie kann in jeder Planungsperiode (etwa jährlich) neu getroffen werden. Fehlentscheidungen wirken sich hier „nur“ auf den Ressourcenbestand aus, womit negative Folgen sozialisiert werden. Daher bevorzugt ein Unternehmen im Zweifelsfall höhere kurzfristige Gewinne. Weiterhin kann es aufgrund der Konkurrenzverhältnisse zu voreiligen Entscheidungen kommen, um etwa anderen Unternehmen beim Abfischen eines Fisch-Schwarms zuvor zu kommen. So bestätigen Studien, dass Fischereierunternehmen recht kurze Planungszeiträume für die Fangentscheidung ansetzen (z.B. Asche 1999).

Der kurzfristige Gewinn in Abhängigkeit vom Ressourcen- und Kapitalbestand wird durch folgende Definition beschrieben.

DEFINITION 5.7: Eine **kurzfristige Gewinnfunktion** π ist durch

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}_+^3 &\rightarrow \mathbb{R}, \\ [h, x, K] &\mapsto ph - c^E(h, x, K), \end{aligned}$$

gegeben, wenn $p \in \mathbb{R}_+$, und c^E eine Erntekostenfunktion ist.

Zieht man von der kurzfristigen Gewinnfunktion die Investitionskosten ab, und diskontiert das Ergebnis mit dem Faktor e^{-rt} ab, erhält man aus der kurzfristigen Gewinnfunktion gerade den Integranden des Zielfunktional. Die myopische Ernte-Entscheidung über $h(t)$ erfolgt so, dass zu jedem Zeitpunkt $t \in J$ unter gegebenem $x(t)$ und $K(t)$ die kurzfristige Gewinnfunktion maximal wird.

Man kann den Entscheidungsprozess der Unternehmen damit auch folgendermaßen verstehen: Die Erntemenge wird zu jedem Zeitpunkt unabhängig von langfristigen Plänen und Zukunftserwartungen gewählt. Dabei wird die Differenz aus Erlös und Fangkosten maximiert. Erst in einem zweiten Entscheidungsschritt wird ein Teil dieses Betrages für Investitionen abgeführt, dessen Umfang sich jedoch aus dem langfristigen Kalkül ergibt.

5.2 Mathematische Analyse

In der mathematischen Analyse kann nun von der bioökonomischen Interpretation der aufgestellten mathematischen Ausdrücke abgesehen werden. Für die langfristige Planung gilt es, die Lösung des folgenden Problems zu finden,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x) - Nh, & x(0) &= x_0 \in \mathbb{R}_+, \\ \dot{K} &= I - \delta K, & K(0) &= K_0 \in \mathbb{R}_+, \\ \max_{h, I} \Pi(h, I) &= \int_J e^{-rt} [ph - c^E(h, x, K) - c^I(I)] dt, \end{aligned} \tag{5.2}$$

wobei die geforderten Monotonie- und Konvexitätseigenschaften der Investitionskosten- und Erntekostenfunktion gelten (siehe Def. 5.3 und Def. 5.5). Insbesondere sind c^I und c^E konvex, und steigen monoton in I bzw. h . Die Erntekosten sinken monoton in x und K . Die Parameter p , r und T , sowie N und δ seien vorgegeben. Es werden zwei Funktionen h, I gesucht, die das Gewinnfunktional Π unter Berücksichtigung der anderen Annahmen maximieren. Derartige Probleme sollen zunächst aus allgemeinerer Perspektive betrachtet werden.

5.2.1 Dynamische Optimierung

In diesem Abschnitt wird die Theorie erläutert, mit der das im Modell auftretende dynamische Optimierungsproblem gelöst und es in einen weiteren Kontext eingeordnet werden kann. Er führt zum sog. Maximumprinzip von Pontryagin et al. (1962), welches notwendige Bedingungen an Optima stellt. Die vorgestellte Fassung des Maximumprinzips orientiert sich im Wesentlichen an der Darstellung von Lee and Markus (1967).

Formulierung eines dynamischen Optimierungsproblems

Zunächst sollen die Begriffe System, Steuerung und Trajektorie definiert werden. Hierzu benötigt man folgende Mengen.

DEFINITION 5.8: Gegeben sei der **Zustandsraum** $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, eine Menge $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$, die als **Steuerungsbereich** bezeichnet wird, sowie ein kompaktes **Zeitintervall** $J = [0, T] \subseteq \mathbb{R}$.

Man betrachtet nun gewisse Funktionenräume auf diesen Mengen, aus denen die Verläufe von Zustands- und Steuerungsgrößen x bzw. u gewählt werden.

DEFINITION 5.9: Mit $C_\pi^1(J, M)$ sei der Raum der Funktionen $f : J \rightarrow M$ vom Zeitintervall J in die Menge M bezeichnet, die **stückweise stetig differenzierbar** sind. Dabei dürfen jeweils nur endlich viele Unstetigkeitsstellen t_1, \dots, t_r auftreten, die nicht am Rand von J liegen. An den Unstetigkeitsstellen muss außerdem ein endlicher links- und rechtsseitiger Grenzwert vorliegen.

Damit sind insbesondere die Räume $C_\pi^1(J, \mathcal{U})$ und $C_\pi^1(J, \mathcal{X})$ für den Steuerungsbereich und den Zustandsraum definiert.

DEFINITION 5.10: Eine Funktion $u \in C_\pi^1(J, \mathcal{U})$ heißt **Steuerung**.

Die Festlegung auf stückweise stetige Funktionen erlaubt den Beweis der in diesem Abschnitt angeführten Theoreme. Auch Verallgemeinerungen auf umfassendere Funktionenräume sind möglich, aber für die Zwecke dieser Arbeit nicht notwendig. Da beabsichtigt ist, die Lösungen des Optimierungsproblems mit qualitativen Differentialgleichungen zu ermitteln, müssen stetig differenzierbare Funktionen vorliegen (vgl. Kapitel 2). Es erweist sich jedoch als unproblematisch, wenn die hier verwendeten Funktionen nur stückweise stetig differenzierbar sind, da ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem dann auf endlich vielen Intervallen getrennt betrachtet werden kann, auf denen die Funktionen jeweils stetig differenzierbar sind. Für das Differentialgleichungssystem seien folgende Bezeichnungen gewählt:

DEFINITION 5.11: Durch eine in allen Komponenten stetig differenzierbare Funktion

$$f : \mathcal{X} \times \mathcal{U} \times J \rightarrow \mathcal{X},$$

$$[x, u, t] \mapsto [f_1(x, u, t), \dots, f_n(x, u, t)]$$

ist das nicht-autonome gewöhnliche Differentialgleichungssystem

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

gegeben, welches im Folgenden **System** eines dynamischen Optimierungsproblems genannt wird. Dabei ist $J = [0, T]$ ein Zeitintervall. Eine Funktion $x \in C_\pi^1(J, \mathcal{X})$, die diese Gleichung bei vorgegebener Steuerung $u \in C_\pi^1(J, \mathcal{U})$ erfüllt und für die zugleich $x(0) = x_0$ bei ebenfalls vorgegebenem $x_0 \in \mathcal{X}$ gilt, heißt **Lösung** des zugehörigen Anfangswertproblems, oder auch Lösung des Systems. Die Lösung x wird auch **Trajektorie** genannt.

Über die Existenz von Lösungen für eine gegebene Steuerung $u \in C_\pi^1(J, \mathcal{U})$ gibt die folgende Aussage Auskunft (nach Pontryagin et al. 1962):

PROPOSITION 5.1: Es sei eine Steuerung $u \in C_\pi^1(J, \mathcal{U})$ und ein Anfangswert $x_0 \in \mathcal{X}$ gegeben. Das Anfangswertproblem eines Systems besitzt dann eine eindeutige Lösung $x \in C_\pi^1(J, \mathcal{X})$ auf einem Intervall $[0, T'] \subseteq J$.

BEWEIS: Hierzu wird J in Teilintervalle zerlegt, auf denen die Steuerung u stetig differenzierbar ist. Auf die Teilintervalle kann einzeln der Existenzsatz von Picard-Lindelöf angewendet werden. Existiert eine Lösung auf einem ganzen Teilintervall, so kann an der Unstetigkeitsstelle eine Lösung für das nächste Teilintervall „angeheftet“ werden.

Die Steuerung habe $k-1$ Unstetigkeitsstellen, die aufsteigend sortiert mit t_1, \dots, t_{k-1} bezeichnet werden; ferner sei $t_0 = 0$ und $t_k = T$. Durch die Unstetigkeitsstellen sind Intervalle $J_i = [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, k$ gegeben, auf denen die Steuerung u jeweils stetig differenzierbar ist (mit deren stetig differenzierbaren Fortsetzung auf den Rand des Intervalls). Definiert man nun $\hat{f}(t, x) := f(x, u(t), t)$, so ist auch diese Funktion stetig differenzierbar. Damit ist dort jeweils eine gewöhnliche Differentialgleichung $\dot{x} = \hat{f}(t, x)$ gegeben. Betrachtet man die Funktion \hat{f} auf einem beschränkten Intervall, so ist sie dort Lipschitz-stetig, da sie stetig differenzierbar ist. Für das Intervall J_1 und den Anfangswert x_0 garantiert der Satz von Picard-Lindelöf damit, dass es eine eindeutige Lösung zumindest auf einem Intervall $[t_0, t'_1]$, $t'_1 \leq t_1$ gibt.

Gilt sogar $t'_1 = t_1$, so kann mit dem Anfangswert $x_1 = x(t_1)$ ein neues Anfangswertproblem für das Intervall J_2 aufgestellt werden, welches die gleichen Lösbarkeits-eigenschaften hat. Die Lösung wird also stetig fortgesetzt. Solange Lösungen auf den ganzen Teilintervallen vorliegen, lässt sich dieses Argument wiederholen. Der Prozess bricht im Intervall J_i ab, wenn dort $t'_i < t_i$ gilt, oder wenn mit $i = k$ der rechte Rand von J erreicht wird, dort also $t'_i = t_k = T$ gilt. Die Stelle t'_i sei mit T' bezeichnet.

Die Lösung x ist dann in jedem Intervall (in dem sie existiert) stetig differenzierbar, da ihre Ableitung dort die Komposition aus den stetigen Funktionen \hat{f} und x ist. Damit gilt $x \in C_\pi^1(J, \mathcal{X})$. ■

Die Lösbarkeitseigenschaften des Systems bezüglich der gewählten Funktionenräume machen es notwendig, Steuerungen mit der folgenden Eigenschaft zu betrachten:

DEFINITION 5.12: Eine Steuerung $u \in C_\pi^1(J, \mathcal{U})$ heißt **zulässig** bezüglich eines Systems, wenn dieses mit u eine Lösung $x \in C_\pi^1(J, \mathcal{X})$ auf ganz J besitzt. Die Funktion x heißt dann auch die **zur Steuerung u gehörende Lösung**.

Weiterhin ist zu spezifizieren, was optimiert werden soll:

DEFINITION 5.13: Es sei eine in allen Argumenten stetig differenzierbare Funktion $f_0 : \mathcal{X} \times \mathcal{U} \times I \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Das Funktional

$$\begin{aligned} \Pi : C_\pi^1(J, \mathcal{X}) \times C_\pi^1(J, \mathcal{U}) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ [x, u] &\mapsto \int_J f_0(x(t), u(t), t) dt \end{aligned}$$

heißt dann **Zielfunktional**.

Das Zielfunktional ordnet jeder zulässigen Steuerung u und der zugehörigen Lösung x eine reelle Zahl zu. Die Existenz der Integrals über der kompakten Menge J ist in Def. 5.13 durch die stückweise Stetigkeit von x und u sowie die Stetigkeit von f_0 gesichert.

Ziel der dynamischen Optimierung ist es nun, unter allen zulässigen Steuerungen eines Systems diejenige herauszufinden, die das Zielfunktional minimiert.

DEFINITION 5.14: Gegeben sei ein System mit dem Zustandsraum $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, dem Steuerungsbereich $\mathcal{U} = \mathbb{R}_+^m$ und dem Zeitintervall $J = [0, T]$. Ferner sei ein durch f_0 bestimmtes Zielfunktional Π gegeben. Dann lautet das **dynamische Optimierungsproblem**:

Gesucht ist eine zulässige Steuerung u^* des Systems, so dass - wenn x^* die zu u^* gehörende Lösung ist - für alle zulässigen Steuerungen u und deren zugehörigen Lösungen x gilt

$$\Pi(x, u) \geq \Pi(x^*, u^*).$$

Die Funktion u^* heißt dann **optimale Steuerung** und x^* **optimale Trajektorie**.

Damit ist das Problem exakt genug gestellt, um sich der Bestimmung von Lösungen zuzuwenden.

Notwendige Bedingungen an optimale Steuerungen

In diesem Abschnitt wird das berühmte Maximumprinzip von Pontryagin et al. (1962) eingeführt, welches unter gewissen Voraussetzungen notwendige Bedingungen an optimale Steuerungen angibt. Hierzu werden zunächst weitere Begriffe definiert (nach Lee and Markus 1967).

DEFINITION 5.15: Das **erweiterte System** $\dot{\hat{x}} = \hat{f}(\hat{x}, t, u)$ wird aus dem System $\dot{x} = f(x, t, u)$, $x = [x_1, \dots, x_n]$ durch

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= f_0(x, t, u), \\ \dot{x}_1 &= f_1(x, t, u), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x, t, u), \end{aligned}$$

und den zusätzlichen Anfangswert $x_0(0) = 0$ gebildet. Dabei ist die Funktion f_0 der Integrand des Zielfunktional Π , und $f = [f_1, \dots, f_n]$.

Das erweiterte System wird aufgestellt, um Auskunft über den Wert des Zielfunktional, „an der Stelle t “ zu erhalten. Nach der Definition von f_0 ist $\Pi(x, u)$ gerade $x_0(T)$. Man beachte, dass in den Differentialgleichungen für x_1, \dots, x_n die Variable x_0 nicht vorkommt.

DEFINITION 5.16: Das **adjungierte System** zum erweiterten System $\dot{\hat{x}} = \hat{f}(\hat{x}, t, u)$ ist durch die Differentialgleichung

$$\dot{\hat{\lambda}} = -\hat{\lambda} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{x}}(\hat{x}, t, u)$$

in $\lambda = [\lambda_0, \dots, \lambda_n]$ gegeben; ausführlicher:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_0 &= 0 \\ \dot{\lambda}_j &= -\sum_{i=0}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x, t, u), \quad j = 1, \dots, n \\ \dot{\lambda}_{n+1} &= -\sum_{i=0}^n \lambda_i \dot{f}_i(x, t, u). \end{aligned}$$

Die Variablen λ_i , $i = 0, \dots, n$ heißen auch **adjungierte Variablen**.

Als letzter Vorbereitungsstschritt werden die folgenden Funktionale definiert:

DEFINITION 5.17: Das **Hamiltonfunktional** eines dynamischen Optimierungsproblems ist durch

$$H(\hat{\lambda}(t), \hat{x}(t), t, u(t)) := \sum_{i=0}^n \lambda_i f_i(x(t), t, u(t))$$

gegeben, das **maximierte Hamiltonfunktional** durch:

$$M(\hat{\lambda}(t), \hat{x}(t), t) := \max_{u \in \mathcal{U}} \hat{H}(\hat{\lambda}(t), \hat{x}(t), t, u).$$

Diese Funktionale ordnen einer Lösung des Systems und des adjungierten Systems in jedem Punkt aus J eine reelle Zahl zu (das maximierte Hamiltonfunktional nur im Existenzfall). Damit lässt sich das folgende Theorem formulieren (nach Lee and Markus 1967):

THEOREM über notwendige Optimalitätsbedingungen (Maximumprinzip): Es sei ein dynamisches Optimierungsproblem gegeben. Angenommen $u^* \in C^1_\pi(J, \mathcal{U})$ sei die optimale Steuerung und \hat{x}^* die zugehörige Lösung des erweiterten Systems, dann gilt:

1. Es gibt eine Lösung $\hat{\lambda}^*$ des adjungierten Systems mit $\lambda_0^* \leq 0$ auf J .
2. Damit gilt

$$\forall t \in J : H(\hat{\lambda}^*(t), \hat{x}^*(t), t, u^*(t)) = M(\hat{\lambda}^*(t), \hat{x}^*(t), t)$$

3. Außerdem gilt $\hat{\lambda}^*(T) = 0$.

Der Beweis des Maximumprinzips soll hier nicht erfolgen, da er den Umfang dieser Arbeit beträchtlich erhöhen würde. An dieser Stelle sei auf die Originalarbeit von Pontryagin et al. (1962) bzw. die Darstellung von Lee and Markus (1967) verwiesen. Für die Zwecke des Modells myopischer Ressourcennutzung ist dieser allgemeine Beweis gar nicht notwendig, wie sich im nächsten Abschnitt zeigen wird. Hier wird das Maximumprinzip als Heuristik verwendet, um eine Vermutung über die Lösung der Optimierungsproblems aufzustellen, deren Optimalität sich leichter beweisen lässt. Zusätzlich können hinreichende Optimalitätsbedingungen aufgestellt werden, worüber das Maximumprinzip keine Aussagen macht.

5.2.2 Die optimale Fang- und Investitionsentscheidung

Der Beweis hinreichender Bedingungen für die optimale Fang- und Investitionsentscheidung im langfristigen Kalkül erfolgt mit einer abgewandelten Form des Theorems von Mangasarian (1966). Die Lösung wird folgendermaßen hergeleitet: Zuerst wird das Optimierungsproblem, wie es in den Gleichungen (5.2) aufgestellt ist, durch Variablentransformation umformuliert. Dadurch erhält es einige wichtige Eigenschaften, die festgehalten werden. Sodann wird das Maximumprinzip angewendet, um notwendige Bedingungen an Lösungen zu gewinnen. Daraufhin erfolgt der Beweis, dass diese Bedingungen dank der festgehaltenen Eigenschaften hinreichend für die Optimalität sind. Zum Schluss wird die Lösung durch eine weitere Rechnung vereinfacht.

Transformation des Problems

Mit der kurzfristigen Gewinnfunktion $\pi(h, x, K) = ph - c^E(h, x, K)$ nach Def. 5.7 können die Gleichungssystem (5.2) (vgl. S. 64) folgendermaßen formuliert werden:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x) - Nh, & x(0) &= x_0, \\ \dot{K} &= I - \delta K, & K(0) &= K_0, \\ \max_{h, I} \Pi(h, I) &= \int_J e^{-rt} [\pi(h, x, K) - c^I(I)] dt. \end{aligned}$$

Des Weiteren werden Bezeichnungen eingeführt, die darauf abzielen, das Vorzeichen der Zustandsgröße x umzukehren, sowie die Notation zu vereinfachen.

DEFINITION 5.18: Es seien

$$\begin{aligned} \tilde{x} &:= -x, \\ \tilde{F}(\tilde{x}) &:= -F(-\tilde{x}), \\ \tilde{\pi}(\tilde{x}, K, h, I) &:= \pi(h, -\tilde{x}, K) - c^I(I). \end{aligned}$$

Damit seien die Funktionen

$$\begin{aligned} j(\tilde{x}, K, h, I) &:= -e^{-rt} \tilde{\pi}(\tilde{x}, K, h, I), \\ f(\tilde{x}, h) &:= \tilde{F}(\tilde{x}) + Nh, \\ g(K, I) &:= I - \delta K. \end{aligned}$$

definiert.

Da hiermit $\dot{\tilde{x}} = -\tilde{x}$ gilt, erhält man folgende äquivalente Beschreibung des Gleichungssystems (5.2):

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= f(\tilde{x}, h), & \tilde{x}(0) &= -x_0, \\ \dot{K} &= g(K, I), & K(0) &= K_0, \\ \min_{h,I} &= \int_J j(\tilde{x}, K, h, I) dt.\end{aligned}\tag{5.3}$$

Die beteiligten Funktionen haben folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{\tilde{x}}(\tilde{x}) &= -\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} F(-\tilde{x}) = F_x(x), \\ \tilde{F}_{\tilde{x}\tilde{x}}(\tilde{x}) &= \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} F_x(-\tilde{x}) = -F_{xx}(x),\end{aligned}\tag{5.4}$$

und außerdem:

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}_{\tilde{x}\tilde{x}} &= -c_{xx}^E, \\ \tilde{\pi}_{\tilde{x}K} &= c_{xK}^E, \\ \tilde{\pi}_{\tilde{x}h} &= c_{xh}^E.\end{aligned}\tag{5.5}$$

Damit können folgende Aussagen gemacht werden:

PROPOSITION 5.2: Die Funktionen $j : \mathbb{R}_+^4 \rightarrow \mathbb{R}_+$ und $f : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ sind differenzierbar und konvex in allen Komponenten, die Funktion $g : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ ist linear. Außerdem gilt $\tilde{\pi}_I \leq 0$.

BEWEIS:

1. Die Linearität von g ist offensichtlich.
2. Nach Def. 5.5 ist $\tilde{\pi}_I = -c_I^I(I) < 0$.
3. Die Differenzierbarkeit von j und f ergibt sich aus der Differenzierbarkeit der Erntekostenfunktion c^E , der Investitionskostenfunktion c^I und der Regenerationsfunktion F (Def. 5.1, Def. 5.3 und Def. 5.5).
4. Zur Konvexität der Funktion f wird deren Hesse-Matrix \mathcal{H}_f betrachtet. Es gilt

$$\mathcal{H}_f = \begin{bmatrix} f_{\tilde{x}\tilde{x}} & f_{\tilde{x}h} \\ f_{h\tilde{x}} & f_{hh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{F}_{\tilde{x}\tilde{x}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Da nach Gleichung (5.4) $\tilde{F}_{\tilde{x}\tilde{x}} = -F_{xx}$ ist, und nach Def. 5.1 die Ungleichung $F_{xx} < 0$ gilt, ist \mathcal{H}_f positiv semidefinit. Das bedeutet aber, dass f (nicht streng) konvex ist.

5. Die Konvexität von j folgt aus der Konvexität von c^E und c^I nach Def. 5.3 bzw. Def. 5.5. ■

Notwendige Bedingungen

Für das transformierte Problem aus Gleichung (5.3) werden nun mit Hilfe des Maximumprinzips notwendige Bedingungen an Lösungen aufgestellt. Als adjungiertes System (vgl. Def. 5.16) erhält man die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_0 &= 0, \\ \dot{\lambda}_1 &= -\lambda_0 j_{\tilde{x}} - \lambda_1 f_{\tilde{x}} - \lambda_2 g_{\tilde{x}}, \\ \dot{\lambda}_2 &= -\lambda_0 j_K - \lambda_1 f_K - \lambda_2 g_K\end{aligned}$$

in den neu eingeführten Variablen λ_0 , λ_1 und λ_2 . Definiert man

$$\tilde{\lambda} := \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \quad \text{und} \quad \tilde{\mu} := \frac{\lambda_2}{\lambda_0},$$

so ist $\text{sgn}(\tilde{\lambda}) = -\text{sgn}(\lambda_1)$ und $\text{sgn}(\tilde{\mu}) = -\text{sgn}(\lambda_2)$, da nach dem Maximumprinzip notwendig $\lambda_0 < 0$ sein muss. Beachtet man außerdem, dass $g_{\tilde{x}} = 0$ und $f_K = 0$ ist, vereinfacht sich das adjungierte System zu

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\lambda}} &= -j_{\tilde{x}} - \tilde{\lambda}f_{\tilde{x}}, \\ \dot{\tilde{\mu}} &= -j_K - \tilde{\mu}g_K. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Ein Optimum muss nicht nur dem adjungierten System genügen, sondern auch für alle $t \in J$ das Hamiltonfunktional

$$H = \lambda_0 j + \lambda_1 f + \lambda_2 g$$

bezüglich h und I maximieren (vgl. Def. 5.17). Dividiert man hier wieder durch die negative Konstante λ_0 , so erhält man das Funktional

$$\tilde{H} := j + \tilde{\lambda}f + \tilde{\mu}g,$$

welches dann jedoch zu minimieren ist, da $\text{sgn}(\tilde{H}) = -\text{sgn}(H)$. Notwendig hierfür sind die Bedingungen

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{H}_h = j_h + \tilde{\lambda}f_h, \quad \text{und} \\ 0 &= \tilde{H}_I = j_I + \tilde{\mu}g_I, \end{aligned} \quad (5.7)$$

wobei zur Vereinfachung davon Gebrauch gemacht wurde, dass $g_h = f_I = 0$ gilt. Diese beiden Bedingungen sind auch hinreichend für die Minimierung von \tilde{H} , da die Hesse-Matrix

$$\mathcal{H}_{\tilde{H}} = \begin{bmatrix} c_{hh}^E & 0 \\ 0 & c_{II}^I \end{bmatrix}$$

positiv definit ist; denn nach Def. 5.3 und Def. 5.5 gilt $c_{hh}^E, c_{II}^I > 0$. Also ist \tilde{H} streng konvex. Zuletzt muss nach dem Maximumprinzip für die adjungierten Variablen noch $\tilde{\lambda}(T) = 0$ und $\tilde{\mu}(T) = 0$ gelten. Weitere Aussagen ermöglicht das Maximumprinzip an dieser Stelle nicht.

Optimale Lösungen

Aufgrund der angeführten Konvexitätseigenschaften kann gezeigt werden, dass die Gleichungen (5.6) und (5.7) optimale Steuerungen h und I liefern. Vor dem Beweis werden noch eine weitere Annahme und Feststellungen gemacht.

Aus den Gleichungen (5.6) und (5.7) folgt:

$$\begin{aligned} j_{\tilde{x}} &= -\tilde{\lambda}f_{\tilde{x}} - \dot{\tilde{\lambda}}, \\ j_K &= -\tilde{\mu}g_K - \dot{\tilde{\mu}}, \\ j_h &= -\tilde{\lambda}f_h, \\ j_I &= -\tilde{\mu}g_I. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Für den Optimalitätsbeweis werden Aussagen über die Vorzeichen von $\tilde{\lambda}$ und $\tilde{\mu}$ benötigt. Hierzu sei angenommen, dass für alle $t \in J$

$$\tilde{\pi}_h = p - c_h^E(h, x, K) \geq 0 \quad (5.9)$$

gelte. Die Ungleichung besagt, dass nur solche Fang- und Investitionsentscheidungen getroffen werden, bei denen der am Markt erzielte Preis p über der Kostensteigerung liegt, die durch eine Erhöhung der Ernte verursacht würde. Ansonsten würde eine Senkung der Erntemenge h zu einem Zeitpunkt $t \in J$ bei gleich bleibender Investitionsentscheidung zu einem höheren Gewinn $\tilde{\pi}$ führen, was nicht optimal sein kann.

Da hiermit $j_h = -e^{-rt}\tilde{\pi}_h \leq 0$ und $f_h = N > 0$ gilt, ist

$$\tilde{\lambda} \geq 0, \quad (5.10)$$

und analog

$$\tilde{\mu} \leq 0, \quad (5.11)$$

da $j_I = -e^{-rt}\tilde{\pi}_I \geq 0$, und $g_I = 1 > 0$ ist (nach Prop. 5.2). Für $t = T$, wird nach dem Maximumprinzip verlangt, dass die adjungierten Variablen verschwinden. An dieser Stelle ist daher $I = 0$ und $p = c_h^E(h, x, K)$. Die Behauptung lautet nun:

PROPOSITION 5.3: Lösungen des Randwertproblems

$$\dot{\tilde{x}} = f(\tilde{x}, h), \quad \tilde{x}(0) = -x_0, \quad (5.12)$$

$$\dot{K} = g(K, I), \quad K(0) = K_0, \quad (5.13)$$

$$\dot{\tilde{\lambda}} = -j_{\tilde{x}} - \tilde{\lambda}f_{\tilde{x}}, \quad \tilde{\lambda}(T) = 0, \quad (5.14)$$

$$\dot{\tilde{\mu}} = -j_K - \tilde{\mu}g_K, \quad \tilde{\mu}(T) = 0, \quad (5.15)$$

$$\tilde{\lambda} = -\frac{1}{N}j_h, \quad (5.16)$$

$$\tilde{\mu} = -j_I \quad (5.17)$$

sind Steuerungen h, I sowie zugehörige Lösungen des adjungierten Systems, die das Zielfunktional

$$\Pi(h, I) = \int_J j(\tilde{x}, K, h, I) dt$$

minimieren.

BEWEIS: Zunächst erfolgen einige Vereinbarungen. Die Funktionen $\tilde{x}^*, K^*, h^*, I^*, \tilde{\lambda}$ und $\tilde{\mu}$ seien Lösungen des Randwertproblems (5.12)-(5.17). Zur Vereinfachung der Schreibweise sei ferner $\Pi^* := \Pi(h^*, I^*)$, $j^*(t) := j(\tilde{x}^*(t), K^*(t), h^*(t), I^*(t))$, $g^*(t) := g(\tilde{x}^*(t), h^*(t))$ und $h^*(t) := g(K^*(t), I^*(t))$.

Im Folgenden wird nun gezeigt, dass $\Pi - \Pi^* > 0$ ist. Die Lösung des Randwertproblems ist also minimal unter allen Lösungen \tilde{x}, K, h, I des Differentialgleichungssystems aus den Gleichungen (5.12) und (5.13). Dies ergibt sich aus folgender

(Un)gleichungskette:

$$\begin{aligned} \Pi - \Pi^* &= \int_J (j - j^*) dt \\ &\geq \int_J (\tilde{x} - \tilde{x}^*) j_{\tilde{x}} + (K - K^*) j_K + (h - h^*) j_h + (I - I^*) j_I dt \quad (5.18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= - \int_J (\tilde{x} - \tilde{x}^*) (\tilde{\lambda} f_{\tilde{x}} + \dot{\tilde{\lambda}}) + (K - K^*) (\tilde{\mu} g_k + \dot{\tilde{\mu}}) + \\ &\quad + (h - h^*) \tilde{\lambda} f_h + (I - I^*) \tilde{\mu} g_I dt \quad (5.19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= - \int_J (\tilde{x} - \tilde{x}^*) \dot{\tilde{\lambda}} + (K - K^*) \dot{\tilde{\mu}} dt \\ &\quad - \int_J (\tilde{x} - \tilde{x}^*) \tilde{\lambda} f_{\tilde{x}} + (K - K^*) \tilde{\mu} g_k + (h - h^*) \tilde{\lambda} f_h + (I - I^*) \tilde{\mu} g_I dt \\ &= \int_J (f - f^*) \tilde{\lambda} + (g - g^*) \tilde{\mu} dt \\ &\quad - \left[(\tilde{x}(T) - \tilde{x}^*(T)) \tilde{\lambda}(T) + (K(T) - K^*(T)) \tilde{\mu}(T) \right] \\ &\quad - \left[(\tilde{x}_0 - \tilde{x}_0^*) \tilde{\lambda}(0) + (K_0 - K_0^*) \tilde{\mu}(0) \right] \\ &\quad - \int_J [(\tilde{x} - \tilde{x}^*) f_{\tilde{x}} + (h - h^*) f_h] \tilde{\lambda} dt \\ &\quad - \int_J [(K - K^*) g_k + (I - I^*) g_I] \tilde{\mu} dt \quad (5.20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq \int_J (f - f^*) \tilde{\lambda} dt + \int_J (g - g^*) \tilde{\mu} dt \\ &\quad - \int_J (f - f^*) \tilde{\lambda} dt - \int_J (g - g^*) \tilde{\mu} dt \quad (5.21) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Die Abschätzung (5.18) ist aufgrund der Differenzierbarkeit und Konvexität von j gemäß Prop. 5.2 möglich. Zum Ausdruck (5.19) gelangt man durch Einsetzen der Gleichungen (5.8) für die partiellen Ableitungen von j . Durch partielle Integration des ersten Terms und Umordnen der anderen Terme erhält man den Ausdruck (5.20). Im nächsten Schritt zu Ausdruck (5.21) fällt der zweite und dritte Term weg, da $\dot{\tilde{\lambda}}(T) = \dot{\tilde{\mu}}(T) = 0$ und $\tilde{x}_0 = \tilde{x}_0^*$ ist, sowie $K_0 = K_0^*$ nach Voraussetzung. Aufgrund der Linearität von g ist außerdem $(K - K^*) g_k + (I - I^*) g_I = g - g^*$, womit das Vorzeichen von $\tilde{\mu}$ nicht berücksichtigt werden braucht. Da f nach Prop. 5.2 konvex ist, und nach Ungleichung (5.10) $\tilde{\lambda} \geq 0$ gilt, ist zuletzt

$$[(\tilde{x} - \tilde{x}^*) f_{\tilde{x}} + (h - h^*) f_h] \tilde{\lambda} \leq (f - f^*) \tilde{\lambda}.$$

Damit sind alle Schritte der Abschätzung gezeigt und die Optimalität der Steuerungen h^*, I^* bewiesen. ■

Vereinfachen der Lösung

Bei den im optimalen System auftretenden Ableitungstermen lassen sich weiterer Struktureigenschaften der Funktionen ausnutzen. Sodann lässt sich das Ergebnis durch eine weitere

Variablentransformation für $\tilde{\lambda}$ und $\tilde{\mu}$ weiter vereinfachen. Außerdem wird die Transformation von x zu \tilde{x} zurückgenommen. Durch Einsetzen der Definitionen erhält man

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \tilde{F}(\tilde{x}) + Nh, \\ \dot{\tilde{K}} &= I - \delta K, \\ \dot{\tilde{\lambda}} &= e^{-rt}\tilde{\pi}_{\tilde{x}} - \tilde{\lambda}\tilde{F}_{\tilde{x}}, \quad \tilde{\lambda}(T) = 0, \\ \dot{\tilde{\mu}} &= e^{-rt}\tilde{\pi}_K + \tilde{\mu}\delta, \quad \tilde{\mu}(T) = 0, \\ \tilde{\lambda} &= e^{-rt}\frac{1}{N}\tilde{\pi}_h, \\ \tilde{\mu} &= -e^{-rt}c_I^I.\end{aligned}\tag{5.22}$$

Definiert man nun eine Funktion λ durch $\tilde{\lambda} = e^{-rt}\lambda$, woraus $\dot{\tilde{\lambda}} = e^{-rt}(\dot{\lambda} - r\lambda)$ folgt, und analog eine Funktion μ , kann der positive Faktor e^{-rt} aus den Gleichungen (5.22) gekürzt werden. Zusammen mit der Rücktransformation von \tilde{x} erhält man

$$\dot{\lambda} - r\lambda = \pi_x + \lambda F_x,\tag{5.23}$$

$$\dot{\mu} - r\mu = \pi_K + \mu\delta,\tag{5.24}$$

$$\lambda = \frac{1}{N}\pi_h, \quad \text{und}\tag{5.25}$$

$$\mu = -c_I^I.\tag{5.26}$$

In einem weiteren Schritt werden nun λ und μ aus dem Gleichungssystem eliminiert. Die Ableitungen der Gleichungen (5.25) und (5.26) sind

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{N}\dot{\pi}_h \quad \text{und}\tag{5.27}$$

$$\dot{\mu} = -\dot{c}_I^I = -c_{II}^I\dot{I}.\tag{5.28}$$

Die Gleichungen (5.27) und (5.25) werden in Gleichung (5.23) eingesetzt; analog setzt man die Gleichungen (5.28) und (5.26) in Gleichung (5.24) ein. Damit sind λ und μ bereits eliminiert, und durch weiteres Umformen erhält man das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(x) - Nh, \\ \dot{K} &= I - \delta K, \\ c_{II}^I\dot{I} &= (r + \delta)c_I^I - \pi_K, \\ \dot{\pi}_h &= (r - F_x)\pi_h + N\pi_x.\end{aligned}\tag{5.29}$$

Die dritte Gleichung des Systems beschreibt das Änderungsverhalten von I . Die vierte stellt zwar eine Differentialgleichung für π_h dar, könnte aber zu einer Differentialgleichung für h aufgelöst werden, indem man die Gleichung

$$\dot{\pi}_h = \pi_{hx}\dot{x} + \pi_{hK}\dot{K} + \pi_{hh}\dot{h}$$

verwendet. Diese Rechnung wird jedoch nicht weiter verfolgt, da es die Modellannahmen zur myopischen Fangentscheidung notwendig machen, diese Differentialgleichung für h durch eine andere Gleichung zu ersetzen. Dies erfolgt im nächsten Abschnitt 5.2.3. Unbeschadet dieser Einschränkung beschreibt das vorstehende System die optimale Ernte- und Investitionsentscheidung eines vorausschauenden Unternehmens.

5.2.3 Die myopische Fangentscheidung

Im Weiteren ist nun die in Abschnitt 5.1.3 begründete Modellannahme zu berücksichtigen, dass Fangentscheidungen nicht diesem optimalen Kalkül folgen, sondern die kurzfristige Gewinnfunktion π maximieren. Erst dadurch erhält man ein Modell myopischer Ressourcennutzung.

Die gewonnenen DGL für h und I lassen sich nicht nur als optimale Steuerungen, sondern auch als Regler interpretieren. Ein Regler ist eine Funktion, die jedem Systemzustand Steuerungsgrößen (hier: deren Ableitungen) zuordnet. Er ist optimal, wenn er zu einer optimalen Steuerung führt. Es ist zwar schwierig, optimale Regler zu bestimmen, doch haben Regler den Vorteil, auf unerwartete Störungen des Systems reagieren zu können, was im bisher vorgestellten Modell nicht auftritt. Existieren solche Störungen, kann eine optimale Lösung im Sinne der dynamischen Optimierung im Vorhinein nicht bestimmt werden.

Im Folgenden wird angenommen, dass der für Investitionen im letzten Abschnitt aufgestellte Regler tatsächlich angewendet wird, auch wenn er nicht optimal ist. Die myopische Fangentscheidung wird jedoch durch einen anderen Regler bestimmt, der dem kurzfristigen Kalkül unterliegt. Gemäß der Modellannahmen wählt ein Unternehmen für alle $t \in J$ eine Erntemenge h^* , so dass für gegebenen Bestand $x(t)$ und Kapitalstock $K(t)$ gilt:

$$\forall h \in \mathbb{R}_+ : \pi(h^*, x(t), K(t)) \geq \pi(h, x(t), K(t)).$$

Die Lösung dieser Extremwertaufgabe wird folgendermaßen bezeichnet:

DEFINITION 5.19: Die **optimale Erntefunktion** $h^* : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $[x, K] \mapsto h^*(x, K)$ maximiert die kurzfristige Gewinnfunktion $\pi(h, x, K)$ bezüglich h bei gegebenen Werten für x und K . Das Maximum $\pi^*(x, K) := \pi(h^*(x, K), x, K)$ wird als **optimale Gewinnfunktion** bezeichnet.

Die Existenz einer optimalen Erntefunktion wird durch folgende Proposition gesichert, die auch einige ihrer Eigenschaften zusammenfasst.

PROPOSITION 5.4: Es sei eine Erntekostenfunktion $c^E : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ gegeben, wodurch nach Def. 5.7 eine kurzfristige Gewinnfunktion π definiert ist.

Durch Auflösen der Gleichung $p = c_h^E(h^*, x, K)$ nach h^* gewinnt man die optimale Erntefunktion $h^*(x, K)$.

Die optimale Gewinnfunktion ist dann $\pi^*(x, K) = ph^*(x, K) - c^E(h^*(x, K), x, K)$. Darüber hinaus gilt $h_K^*, h_x^* > 0$ und $\pi_K^*, \pi_x^* > 0$.

BEWEIS: Für ein Extremum des nach Voraussetzung stetigen Ausdrucks $\pi(h) = ph - c^E(h, x, K)$ ist (abgesehen von einer Randlösung $h = 0$) notwendig, dass seine erste Ableitung verschwindet. Infolgedessen muss $p = c_h^E(h, x, K)$ gelten. Hinreichend für ein Maximum ist dann die Negativität der zweiten Ableitung $\pi_{hh} = -c_{hh}^E$, die durch Def. 5.7 garantiert wird. Die Gleichung kann nach h aufgelöst werden, da diese Definition auch die strenge Monotonie von c^E in h verlangt. Der Satz über implizite Funktionen liefert die partiellen Ableitungen von h^* .

Der optimale Gewinn π^* wird durch Einsetzen der optimalen Erntefunktion gewonnen. Seine partiellen Ableitungen erhält man durch einfaches Differenzieren:

$$\begin{aligned}\pi_K^* &= ph_K^* - [c_K^E(h^*, x, K) + c_h^E(h^*, x, K)h_K^*] \\ &= [p - c_h^E(h^*, x, K)]h_K^* - c_K^E(h^*, x, K) \\ &= -c_K^E(h^*, x, K) > 0.\end{aligned}$$

Hier wird verwendet, dass c_K^E nach Voraussetzung negativ ist. Die Rechnung für π_x^* verläuft analog. ■

Setzt man die optimale Erntefunktion h^* an die Stelle der Lösung h in das Differentialgleichungssystem (5.29) ein, und verfährt analog mit π_K^* , so erhält man folgende Fassung des Modells:

$$\begin{array}{l} \dot{x} = F(x) - Nh^*(x, K), \\ \dot{K} = I - \delta K, \\ \dot{I} = \frac{(\delta+r)}{c_{II}^I} c_I^I(I) - \frac{1}{c_{II}^I} \pi_K^*(x, K). \end{array} \quad (5.30)$$

Die vierte Gleichung des Systems (5.29) entfällt hierbei, da die Erntemenge nicht mehr durch eine Differentialgleichung, sondern durch das kurzfristige Kalkül bestimmt wird.

5.3 Das qualitative Modell

Um bioökonomische Aussagen für die Ziele des Modells zu gewinnen, müssen nun Eigenschaften des Differentialgleichungssystems (5.30) herausgearbeitet werden. In den klassischen bioökonomischen Modellen wurden die Gleichgewichte der Systeme gesucht und die Dynamik allenfalls anhand eines Phasendiagramms untersucht. Dies ist hier bereits schon schwierig, da ein dreidimensionales System vorliegt.

Um dennoch zu Ergebnissen zur Dynamik zu kommen, und Unsicherheiten zu berücksichtigen, wird das System (5.30) nun aus den in Kapitel 4 und Abschnitt 5.1.2 genannten Gründen zu einer QDGL abstrahiert (Abschnitte 5.3.1 und 5.3.2). Nach der Behandlung eines Grenzfalles und von Zusatzbedingungen (Abschnitt 5.3.3) kann die Lösungsmenge bestimmt und vereinfacht werden (Abschnitt 5.3.4).

5.3.1 Abstraktion der Bildbereiche

Zur strukturellen Abstraktion des Systems müssen die beteiligten Funktionen zunächst mit einem qualitativen Wertebereich versehen werden (vgl. Abschnitt 2.1.2). Da die Gleichungen außerdem in elementare strukturelle Abstraktionen zerlegt werden (vgl. Abschnitt 2.2.4), müssen weitere Hilfsgrößen eingeführt und mit einem qualitativen Wertebereich versehen werden.

Außerdem macht es die Software QSIM, die später zur Berechnung der Lösung verwendet wird, notwendig, eigene Variablen für die Ableitungen einiger Funktionen einzuführen. Dies sind in diesem Fall \dot{x} , \dot{K} und \dot{I} , die als dx , dK und dI bezeichnet werden. Weiterhin

werden die Variablen h , c , R und pi eingeführt. Hiermit wird das System äquivalent durch folgende Gleichungen beschrieben:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= dx, \\ \dot{K} &= dK, \\ \dot{I} &= dI, \\ dK &= I - \delta K, \\ dx &= R - Nh, \\ dI &= \frac{1}{c_{II}}((r + \delta)c - pi), \\ R &= F(x), \\ h &= h^*(x, K), \\ pi &= \pi_K(x, K), \\ c &= c_I^I(I).\end{aligned}$$

Bei den meisten Variablen interessiert nur das Vorzeichen, weswegen für diese der Konfluenzraum als qualitativer Wertebereich gewählt wird. Die Mengen der Grenzmarken sind

$$\begin{aligned}L_{dx} &:= \{-\infty, 0, \infty\}, \\ L_{dK} &:= \{-\infty, 0, \infty\}, \\ L_{dI} &:= \{-\infty, 0, \infty\}.\end{aligned}$$

Die Theorie der QDGL verlangt qualitative Wertebereiche, die die Grenzmarken $-\infty$ und ∞ enthalten. Bei einigen Variablen werden aber ausschließlich nichtnegative Werte zugelassen. Dies kann berücksichtigt werden, indem nur solche Lösungen betrachtet werden, die den Nichtnegativitätsbedingungen genügen. Formal betrachtet man also nur Lösungen auf einem Teilraum des Verhaltensraumes, was untenstehende Definition ermöglicht. Daraus entstehende Grenzfälle werden in Abschnitt 5.3.3 behandelt. Dies gilt insbesondere für die Investitionen I , die aufgrund der Irreversibilitätsannahme nicht negativ werden können, aber auch das Kapital K und die Größe pi .

$$\begin{aligned}L_K &:= \{0, \infty\}, \\ L_I &:= \{0, \infty\}, \\ L_{pi} &:= \{0, \infty\}.\end{aligned}$$

Die Wahl der Grenzmarken für I löst auch das Problem, den optimalen Anfangswert I_0 zu bestimmen, da hierdurch alle positiven Werte zu einem qualitativen Wert zusammengefasst sind, der das Optimum enthält. Genau genommen interessiert man sich nur für die qualitative Richtung der Variable I .

Feiner strukturierte Wertebereiche werden für den Bestand x , die Erntemenge h und die Regeneration des Ressourcenbestandes R notwendig. Eine wichtiger Wert für den Bestand ist die natürliche Kapazitätsgrenze Q , bei der die Populationsgröße ohne Eingriffe konstant bleibt. Ebenso wichtige ist der Bestand, bei dem eine maximale Bestandserholung

erfolgt bzw. die maximale nachhaltige Ernte möglich ist (MSY). Dieser Bestand sei mit x_{MSY} bezeichnet. Die Betrachtung dieser Werte macht es notwendig, weitere Grenzmarken für die Ernte und die Bestandserholung einzuführen, nämlich MSY und R_{MSY} . Letzteres entspricht gerade der maximalen Bestandserholung, und eine Ernte der Höhe MSY fischt gerade diese Menge ab. Es sei hier betont, dass diese Grenzmarken nicht numerisch spezifiziert werden müssen, was aufgrund der Unsicherheiten auch problematisch wäre. Es genügt zu wissen, welcher dieser Werte größer ist. Man erhält

$$\begin{aligned} L_x &:= \{0, x_{MSY}, Q, \infty\}, \\ L_R &:= \{-\infty, 0, R_{MSY}\}, \\ L_h &:= \{0, MSY, \infty\}. \end{aligned}$$

Auch hier werden nur Lösungsmengen auf einem eingeschränkten Verhaltensraum betrachtet. Die Variable c erfordert aus noch anzustellenden Betrachtungen keinen qualitativen Wertebereich (siehe nächster Abschnitt 5.3.2).

Die obige Formulierung des Modells mit Hilfsgrößen ermöglicht es, dass jede Gleichung einen elementaren Zusammenhang zwischen zwei oder drei Variablen herstellt, der entweder linear oder durch eine Funktion mit genau spezifizierten Monotonieeigenschaften gegeben ist.

5.3.2 Strukturelle Abstraktion

Mit den gewählten Grenzmarken wird nun aus den Zusammenhängen des Differentialgleichungssystems (5.30) durch elementare strukturelle Abstraktionen eine Menge von Beschränkungen auf dem qualitativen Zustandsraum gewonnen. Hierbei werden weitere qualitative Annahmen gemacht. So lässt sich die Erntefunktion h in Abhängigkeit von Bestand x und Kapital K durch

$$\text{MULT}(x, K, h) \tag{5.31}$$

abstrahieren. Aus ökonomischer Sicht ist die optimale Erntefunktion h eine Produktionsfunktion, die durch die Produktionsfaktoren Kapital und Ressourcenbestand definiert ist. Für die Modellierung derartiger Funktionen wurden in der Ökonomie sog. Cobb-Douglas-Funktionen entwickelt (Linde 1988; Felderer and Homburg 1991; Westphal 1994; Varian 1995). Es lässt sich zeigen, dass solche Funktionen durch die qualitative Multiplikation abstrahiert werden.

DEFINITION 5.20: Eine Funktion $f : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ der Form

$$[x, y] \mapsto f(x, y) := qx^\alpha y^\beta$$

mit $q, \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ heißt **Cobb-Douglas-Funktion**.

In der Literatur wird teilweise nur der Spezialfall $\alpha + \beta = 1$ als Cobb-Douglas-Funktion bezeichnet. Doch bereits die allgemeinere Definition lässt die gewünschte Aussage zu:

PROPOSITION 5.5: Die qualitative Multiplikation $\text{MULT}(X, Y, Z)$ ist eine strukturelle Abstraktion des Zusammenhanges $z = f(x, y)$ mit beliebiger Cobb-Douglas-Funktion f , sofern $x, y \neq 0$ sind.

BEWEIS: Zunächst sei $z = f(x, y)$ sowie X, Y , und Z die Abstraktionen von x, y und z . Es ist zu zeigen, dass $\text{MULT}(X, Y, Z)$ eine strukturelle Abstraktion von $z = f(x, y)$ ist. Nach Def. 2.19 muss also folgende Implikation gelten:

$$z = f(x, y) \Rightarrow [X, Y, Z] \in \text{MULT}. \quad (5.32)$$

Die Definition der Relation MULT (Def. 2.25) stellt Anforderungen an das qualitative Vorzeichen und die qualitative Richtung der Variablen. Diese werden nun der Reihe nach überprüft.

1. Da Abstraktionsfunktionen ordnungserhaltend sind und $0 \in L_x, L_y$ ist, gilt $\text{sgn}(x) = \text{sgn}(X)$, $\text{sgn}(y) = \text{sgn}(Y)$ (hierbei wird auf der linken Seite das gewöhnliche, auf der rechten das qualitative Vorzeichen bezeichnet). Da keine Variable negativ ist, gilt

$$\begin{aligned} z = qx^\alpha y^\beta &\Rightarrow \text{sgn}(z) = \text{sgn}(x)\text{sgn}(y) \\ &\Rightarrow \text{sgn}(Z) = \text{sgn}(X)\text{sgn}(Y). \end{aligned}$$

2. Für die Ableitungen gilt nach der Produktregel und aufgrund der Positivität aller Variablen

$$\begin{aligned} z = qx^\alpha y^\beta &\Rightarrow \dot{z} = q(\alpha x^{\alpha-1} y^\beta \dot{x} + \beta x^\alpha y^{\beta-1} \dot{y}) \\ &\Rightarrow \text{sgn}(\dot{z}) = \text{sgn}(\dot{x}) + \text{sgn}(\dot{y}) \\ &\Rightarrow \text{add}(\text{qdir}(X), \text{qdir}(Y), \text{qdir}(Z)) \\ &\Rightarrow \text{add}(\text{qdir}(X) \odot \text{sgn}(X), \text{qdir}(Y) \odot \text{sgn}(Y), \text{qdir}(Z)). \end{aligned}$$

Damit sind beide Anforderungen gezeigt, womit die erforderliche Implikation (5.32) gilt. ■

Dass die Fälle $x = 0$ und $K = 0$ durch die Proposition nicht abgedeckt sind, ist unproblematisch, da es sich um eine besonders ausgezeichnete Situation handelt, bei der in der späteren Rechnung Lösungsfolgen des Systems abgebrochen werden (der Ressourcenbestand oder der Kapitalstock haben sich aufgelöst).

In der nächsten Proposition wird eine mögliche Funktion vorgestellt, um die Kosten zu beschreiben, die aus der Ernte entstehen. Aus dieser lässt sich eine Cobb-Douglas-Funktion für die Erntemenge h ableiten.

PROPOSITION 5.6: Es sei angenommen, die Erntekosten werden durch eine Funktion $c^E : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ der Form

$$(h, x, K) \mapsto c^E(h, x, K) = q \frac{h^\alpha}{x^\beta K^\gamma} \quad (5.33)$$

mit $\alpha, \beta, \gamma, q \in \mathbb{R}_+$ und $\alpha > 1, \gamma > 0$ beschrieben. Daraus resultiert eine optimale Erntefunktion, die für $h, x, K > 0$ durch $\text{MULT}(x, K, h)$ strukturell abstrahiert wird.

BEWEIS: Es wird gezeigt, dass die nach Prop. 5.4 resultierende optimale Erntefunktion h eine Cobb-Douglas-Funktion ist. Nach Prop. 5.5 wird sie dann durch qualitative Multiplikation abstrahiert, sofern ihre Argumente nicht verschwinden.

Zuerst sind die Voraussetzungen von Prop. 5.4 zu überprüfen. Man sieht sofort ein, dass die Funktion c^E für $h, x, K > 0$ differenzierbar ist. Die strenge Monotonie in h

folgt aus der Annahme $\alpha > 1$, was auch die Konvexität garantiert. Da auch $\gamma > 0$ gilt, fällt c^E monoton in K .

Nach Prop. 5.4 erhält man die optimale Erntefunktion durch Auflösen der Gleichung $p = c_h^E(h^*, x, K)$ nach h^* , also

$$p = \alpha \frac{h^{*\alpha-1}}{x^\beta K^\gamma}$$

$$\Rightarrow h^* = \left(\frac{p}{\alpha q} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} x^{\frac{\beta}{\alpha-1}} K^{\frac{\gamma}{\alpha-1}}.$$

Der konstante Faktor und die Exponenten sind in dieser Gleichung positiv, da $\alpha > 1$ und $\beta, \gamma, p, q > 0$. Also ist die Erntefunktion eine Cobb-Douglas-Funktion. ■

Hiervon unbenommen ist Existenz weiterer Funktionen, aus denen sich durch qualitative Multiplikation abstrahierbare Erntefunktionen ableiten lassen.

Zusätzlich zur Erntefunktion wird eine qualitative Beschränkung für die Ableitung der kurzfristigen Gewinnfunktion $\pi_i = \pi_K$ benötigt. Die Annahme

$$\text{MULT}(x, K, \pi_i) \tag{5.34}$$

lässt sich durch die zusätzliche Forderung von $1 + \gamma > \alpha$ in Prop. 5.6 rechtfertigen. Nach Prop. 5.4 gilt dann:

$$\begin{aligned} \pi_K^* &= -c_K^E(h^*, x, k) \\ &= q\gamma h^{*\alpha} x^{-\beta} K^{-\gamma-1} \\ &= q\gamma \left(\frac{p}{\alpha q} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} x^{\frac{\alpha\beta}{\alpha-1}} K^{\frac{\alpha\gamma}{\alpha-1}} x^{-\beta} K^{-\gamma-1} \\ &= q\gamma \left(\frac{p}{\alpha q} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} x^{\frac{\beta}{\alpha-1}} K^{\frac{\gamma+1-\alpha}{\alpha-1}} \end{aligned} \tag{5.35}$$

Da $1 + \gamma > \alpha$ und $\alpha > 1$ ist, ist dies eine Cobb-Douglas-Funktion, da der konstante Faktor positiv ist.

Aus ökonomischer Sicht handelt es sich hier um sog. steigende Skalenerträge (Varian 1995). Es wird vorausgesetzt, dass die Fischerei-Unternehmen in einer Situation wirtschaften, in der Gewinnzunahmen durch eine Erhöhung des Kapitalstocks größer sind, wenn schon viel Kapital aufgebaut wurde. Dies lässt sich etwa dadurch begründen, dass spezielle Einrichtungen (z.B. moderne Ortungsgeräte) erst dann effizienzsteigernd einsetzbar sind, wenn andere technische Voraussetzungen geschaffen sind (z.B. Schiffe mit großen Reichweiten). Dass π_K^* mit x steigt ist plausibel, da man bei hohem Ressourcenbestand von größeren Gewinnzunahmen durch Investitionen ausgehen kann.

Nun werden die linearen Terme des Systems 5.30 näher untersucht. Es wird sich herausstellen, dass sich diese aus dem angestrebten qualitativen Modell eliminieren lassen, was der Übersichtlichkeit dient und Rechenzeiten verkürzt. Allgemeiner gilt nämlich folgendes:

PROPOSITION 5.7: Für zwei Funktionen $x, y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gelte die Relation $x = f(y)$ mit einer vorgegebenen, streng monoton steigenden, differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ferner gelte $f(0) = 0$,

$$\lim_{y \rightarrow \infty} f(y) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} f(y) = -\infty. \tag{5.36}$$

Die Funktionen seien mit den Grenzmarken $L_x = \{l_{x,1}, \dots, l_{x,n}\}$ bzw. $L_y = \{l_{y,1}, \dots, l_{y,n}\}$ versehen. Beide Mengen haben die Mächtigkeit n . Hiermit gelte

$$\forall i = 1, \dots, n : y = l_{y,i} \Leftrightarrow f(y) = l_{x,i}. \quad (5.37)$$

Bezüglich der von den Grenzmarken erzeugten qualitativen Bildbereiche sind Abstraktionen dieser Funktion dann qualitativ äquivalent.

BEWEIS: Nach der Definition der qualitativen Äquivalenz (Def. 2.27) ist zu zeigen, dass alle Folgenglieder $X_i, Y_i, i \in \mathbb{N}$ der Abstraktionen von x bzw. y unter den gegebenen Voraussetzungen qualitativ äquivalent sind. Hierzu müssen die qualitative Größe und die qualitative Richtung betrachtet werden.

1. Aus den Voraussetzungen (5.37) und (5.36) sowie der Tatsache, dass die Grenzmarken übereinstimmen, folgt bereits, dass

$$\forall i \in \mathbb{N} : \text{qmag}(X_i) = \text{qmag}(Y_i).$$

2. Da $f_y > 0$ ist, gilt

$$\begin{aligned} & \forall t \in \mathbb{R} : x(t) = f(y(t)) \\ \Rightarrow & \forall t \in \mathbb{R} : \dot{x}(t) = f_y(y(t)) \dot{y}(t) \\ \Rightarrow & \forall t \in \mathbb{R} : \text{sgn}(\dot{x}(t)) = \text{sgn}(\dot{y}(t)) \\ \Rightarrow & \forall i \in \mathbb{N} : \text{qdir}(X_i) = \text{qdir}(Y_i). \end{aligned}$$

Also stimmen die Abstraktionen von x und y überall überein. ■

Der hier relevante Spezialfall liegt vor, wenn für zwei Variablen x, y der lineare Zusammenhang $x = ay$ mit $a > 0$ gilt, und die Grenzmarken passend gewählt sind. Somit kann in der qualitativen Fassung des Modells der Ausdruck $\frac{r+\delta}{c_{II}}c$ durch c ersetzt werden. Da $c = c_I^I(I)$ streng monoton steigend in I ist und durch den Ursprung geht, vereinfacht sich der Ausdruck weiter zu I .

Nach diesen Vereinfachungen bleibt noch die Abstraktion der Regenerationsfunktion F . Für die Bestandserholung wurde in Def. 5.1 ein monoton steigenden Verlauf für Werte $x < x_{MSY}$ und einen fallender für $x > x_{MSY}$ angenommen. Dies lässt sich durch die erweiterte Beschränkung

$$R = U_{(x_{MSY}, R_{MSY})}^-(x, R) [(0, 0), (Q, 0)]$$

abstrahieren (vgl. Abschnitt 2.2.4). Die angegebenen korrespondierenden Werte resultieren aus der Annahme, dass F durch den Ursprung geht und ab der natürlichen Tragfähigkeit Q negativ wird.

Zusammen mit der Abstraktion der Addition, der Ableitung (vgl. Abschnitt 2.2.4) und der Tatsache, dass $a = b - c \Leftrightarrow a + c = b$, gewinnt man durch die folgenden Beschränkungen eine strukturelle Abstraktion des Systems aus Gl. (5.30):

$$\begin{aligned}
C_1 &:= D/DT(x, dx), \\
C_2 &:= D/DT(K, dK), \\
C_3 &:= D/DT(I, dI), \\
C_4 &:= ADD(dK, I, K), \\
C_5 &:= ADD(dx, h, R) [(0, h_{MSY}, MSY)], \\
C_6 &:= ADD(dI, pi, I), \\
C_7 &:= U^-(x_{MSY}, R_{MSY})(x, R) [(0, 0), (Q, 0)], \\
C_8 &:= MULT(x, K, h), \\
C_9 &:= MULT(x, K, pi).
\end{aligned}$$

Die korrespondierenden Werte der Beschränkung C_5 besagen, dass der maximale nachhaltige Ertrag MSY per Definition gerade der maximalen Regenerationsfähigkeit des Ressourcenbestandes R_{MSY} entspricht.

Damit hat man nun eine qualitative Differentialgleichung $M = (S, C)$, wobei S der durch $\{L_{dx}, L_{dK}, L_{dI}, L_K, L_I, L_{pi}, L_x, L_h, L_R\}$ erzeugte qualitative Zustandsraum ist, und $C := \{C_1, \dots, C_9\}$.

PROPOSITION 5.8: Die qualitative Differentialgleichung M ist unter den Modellannahmen aus Abschnitt 5.1.3 sowie den Zusatzannahmen aus Gleichung (5.34) und Gleichung (5.31) eine strukturelle Abstraktion des Differentialgleichungssystems (5.30).

BEWEIS: Dies ergibt sich mit dem Vollständigkeitstheorem (vgl. Abschnitt 2.2.3) aus dem bisher gezeigten, da alle Funktionen des Systems mit einem qualitativen Wertebereich versehen wurden und für alle zwischen ihnen geltenden Gleichungen (mit Hilfe der Zusatzannahmen) strukturelle Abstraktionen aufgestellt wurden. Dabei wurden nur qualitativ äquivalente Funktionen zusammengefasst. ■

5.3.3 Grenz- und Anfangszustände

Irreversible Investitionen

Die Irreversibilität der Investitionen wird durch die Ungleichung $I \geq 0$ ausgedrückt. Im Abschnitt 5.3.1 wurde angedeutet, dass der dadurch verkleinerte qualitative Wertebereich Konsequenzen für die Lösung der QDGL hat. Diese sind jedoch nicht von großer Tragweite. Um sie zu berücksichtigen, kann man zunächst auch Lösungen ermitteln, die negative Investitionen beinhalten. Wenn diese gefunden sind, identifiziert man jeweils den ersten qualitativen Zustand s , bei dem $qmag_I(s) = 0$ und $qdir_I(s) = -$ wird. In diesem Zustand ist aus ökonomischer Sicht die Investitionsneigung verschwunden. Die Unternehmen würden ihren Kapitalstock reduzieren, wenn sie könnten. Daher wird eine zusätzliche qualitative Differentialgleichung $M' = (S', C')$ für den Fall aufgestellt, in dem keine Investitionen mehr stattfinden. Auch diese QDGL wird gelöst. Aus der Lösungsmenge wählt man die Lösungen, deren erster Zustand s_0 dem Zustand s entspricht.

Die qualitative Differentialgleichung $M' = (S', C')$ ergibt sich aus M , indem man $dI = 0$ setzt. Dadurch lässt sich auch I eliminieren, wodurch pi überflüssig wird. Damit verändert sich auch der Zustandsraum. Die qualitativen Beschränkungen sind

$$\begin{aligned} C_1 &= D/DT(x, dx), \\ C_2 &= D/DT(K, dK), \\ C_5 &= ADD(dx, h, R) [(0, h_{MSY}, MSY)], \\ C_7 &= U^-_{(x_{MSY}, R_{MSY})}(x, R) [(0, 0), (Q, 0)], \\ C_8 &= MULT(x, K, h), \\ C_{12} &:= M^-(K, dK) [(0, 0)]. \end{aligned}$$

Die Situation einer nicht verwirklichtbaren Neigung zu negativen Investitionen ist also durch die qualitative Differentialgleichung $M' = (S', C')$ beschrieben, deren qualitativer Zustandsraum S' durch $\{L_{dx}, L_{dK}, L_K, L_x, L_h, L_R\}$ erzeugt wird und deren Beschränkungsmenge $C' := \{C_1, C_2, C_5, C_7, C_8, C_{12}\}$ ist. Ein an bestimmte Bedingungen geknüpfter Übergang von einer QDGL zu einer anderen kann mit QSIM leicht programmiert werden.

Die Wahl eines Anfangszustandes

Es ist nicht das Modellziel, alle Lösungen der QDGL zu finden. Vielmehr sollen problematische Systemzustände identifiziert und empirische Entwicklungsmuster rekonstruiert werden (vgl. Abschnitt 5.1.1). Daher kann die Lösungsmenge auf relevante Fälle eingeschränkt werden, indem man nur solche Lösungen zulässt, deren Anfangszustand s_0 vorgegebene Eigenschaften hat. Mit der verwendeten Software QSIM kann dies einfach umgesetzt werden, womit die dort implementierten Algorithmen zusätzlich die Rechenzeiten verkürzen.

Vorgaben werden für x, K, h und I gemacht. Sollen die möglichen Verhalten einer Fischerei-Wirtschaft von ihrer expansiven Entstehung ab rekonstruiert werden, ist von einem natürlichen Bestand $qmag_x(s_0) = (x_{MSY}, Q)$ auszugehen. Da zu Beginn schon (geringe) Kapazitäten vorhanden sein müssen (und sei es nur ein Ruderboot), wird $qmag_K(s_0) = (0, \infty)$ gefordert. Die expansive Situation wird durch die Annahmen $qdir_I(s_0) = +$ und $qdir_h(s_0) = +$ ausgedrückt. Geht man davon aus, dass gerade die ersten Investitionen getätigt werden, und die Erntemenge daher noch gering ist, fordert man außerdem $qmag_I(s_0) = (0, \infty)$ und $qmag_h(s_0) = (0, MSY)$. Abgesehen von technischen Details können die QDGL Q und Q' mit der Software QSIM folgendermaßen in LISP implementiert werden:

```

;;;
;;; Modell Myopischer Ressourcennutzung
;;;

(in-package :qsim)

```

```
;; QDGL M=(S,C): Investitionen finden statt
```

```
(define-QDE invest
  (quantity-spaces
    (x (0 xmsy Q inf) "Bestand")
    (K (0 inf) "Kapital")
    (I (0 inf) "Investitionen")
    (R (minf 0 Rmsy) "Regeneration")
    (h (0 MSY inf) "Ernte")
    (pi (0 inf))
    (dx (minf 0 inf))
    (dK (minf 0 inf))
    (dI (minf 0 inf)))
  (constraints
    ((D/DT x dx))
    ((D/DT K dK))
    ((D/DT I dI))
    ((ADD dK K I))
    ((ADD dx h R) (0 MSY Rmsy))
    ((ADD pi dI I))
    ((U- x R (xmsy Rmsy)) (0 0) (Q 0))
    ((MULT x K h))
    ((MULT x K pi)))
  (transitions
    ((I (0 dec) -> no-investment)))
```

```
;; QDGL M'=(S',C'): Desinvestitionsneigung
```

```
(define-qde desinvest
  (quantity-spaces
    (x (0 xmsy Q inf) "Bestand")
    (K (0 inf) "Kapital")
    (R (minf 0 Rmsy) "Regeneration")
    (h (0 MSY inf) "Ernte")
    (dx (minf 0 inf))
    (dK (minf 0 inf)))
  (constraints
    ((MULT K x h))
    ((ADD dx h R) (0 MSY Rmsy))
    ((U- x R (xmsy Rmsy)) (0 0) (Q 0))
    ((D/DT x dx))
    ((D/DT K dK))
    ((M- K dK) (0 0) (inf minf))))
```

```
;; Anfangswerte
```

```
(setf ini
  '(x (Q nil))
    (K ((0 inf) inc))
    (I ((0 inf) inc))
    (h ((0 msy) inc)))
```

5.3.4 Die Lösungsmenge und ihre Reduktion

Die QDGL liefern eine schwer zu überblickende Menge von mehr als 2000 Lösungen. Es stellt sich jedoch heraus, dass sich die gewonnenen Verhalten oft kaum unterscheiden. Dies deutet Auswege aus dieser Situation an, denn es gibt mehrere Möglichkeiten, die Lösungsmenge zu verkleinern.

Einige Verhaltensweisen unterscheiden sich nur in Variablen, deren Verlauf zur Erreichung der Modellierungsziele nicht bekannt sein muss. In Kapitel 4 wurde gezeigt, dass ein Modell nicht gesichertere Daten verlangen sollte, als zur Erreichung seiner Ziele notwendig sind. Im vorliegenden Fall kann daher von Unterschieden in $qdir_{dx}$, $qdir_{dK}$, und $qdir_{dh}$ abgesehen werden. Dies sind die Vorzeichen der zweiten Ableitung der Bestandsgrößen nach der Zeit. Die Software QSIM erlaubt, Verhalten, die sich nur in diesen Variablen unterscheiden, zusammenzufassen. Hiermit hat man nur noch 554 (aggregierte) Verhalten.

Eine weitere Strategie ist die Einführung weiterer Beschränkungen, die bislang nur implizit gemacht wurden. So lässt sich die Relation

$$\text{MULT}(K, pi, h) \quad (5.38)$$

mit Proposition 5.6 und Gleichung 5.35 folgendermaßen begründen. Damit gilt nämlich

$$h^* = \left(\frac{p}{\alpha q} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} x^{\frac{\beta}{\alpha-1}} K^{\frac{\gamma}{\alpha-1}}$$

und

$$\pi_K^* = q\gamma \left(\frac{p}{\alpha q} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} x^{\frac{\beta}{\alpha-1}} K^{\frac{\gamma+1-\alpha}{\alpha-1}}.$$

Substituiert man den Ausdruck für h^* in die Gleichung für π_K^* , so erhält man

$$\pi_K^* = q\gamma \left(\frac{p}{\alpha q} \right) \frac{h^*}{K}.$$

Bringt man K auf die linke Seite der Gleichung, ergibt sich eine Cobb-Douglas-Funktion, die nach Prop. 5.5 durch die Beschränkung (5.38) abstrahiert wird. Durch diese zusätzliche Beschränkung enthält die (aggregierte) Lösungsmenge nur noch 347 Verhalten.

Diese immer noch recht große Zahl möglicher Trajektorien kann für die Ziele des Modells übersichtlich gemacht werden. Hierzu werden Variablen von besonderem Interesse spezifiziert. Dies sind zunächst der Ressourcenbestand x und der Kapitalbestand K , die Erntemenge h wird später noch hinzugenommen. Die Software QSIM ermöglicht es, alle Zustände in den Verhalten der Lösungsmenge, die in diesen drei qualitativen Variablen übereinstimmen, zu jeweils einer Äquivalenzklasse zusammenzufassen. In den Lösungen werden dann alle Zustände durch ihre jeweilige Äquivalenzklasse ersetzt. Dies induziert eine weitere Äquivalenzrelation auf der Lösungsmenge: Zwei Verhalten sind dann äquivalent, wenn ihre Folgeglieder koeffizientenweise der gleichen Äquivalenzklasse angehören. Im vorliegenden Modell gliedern sich die Zustände in zwölf relevante Äquivalenzklassen. Diese werden in Abbildung 5.1 dargestellt.

Zusätzlich wurden einige Äquivalenzklassen entfernt, da sie aufgrund des Modellzieles und -fokus irrelevant sind. Dies sind alle Zustände, bei denen zwei oder mehr Größen

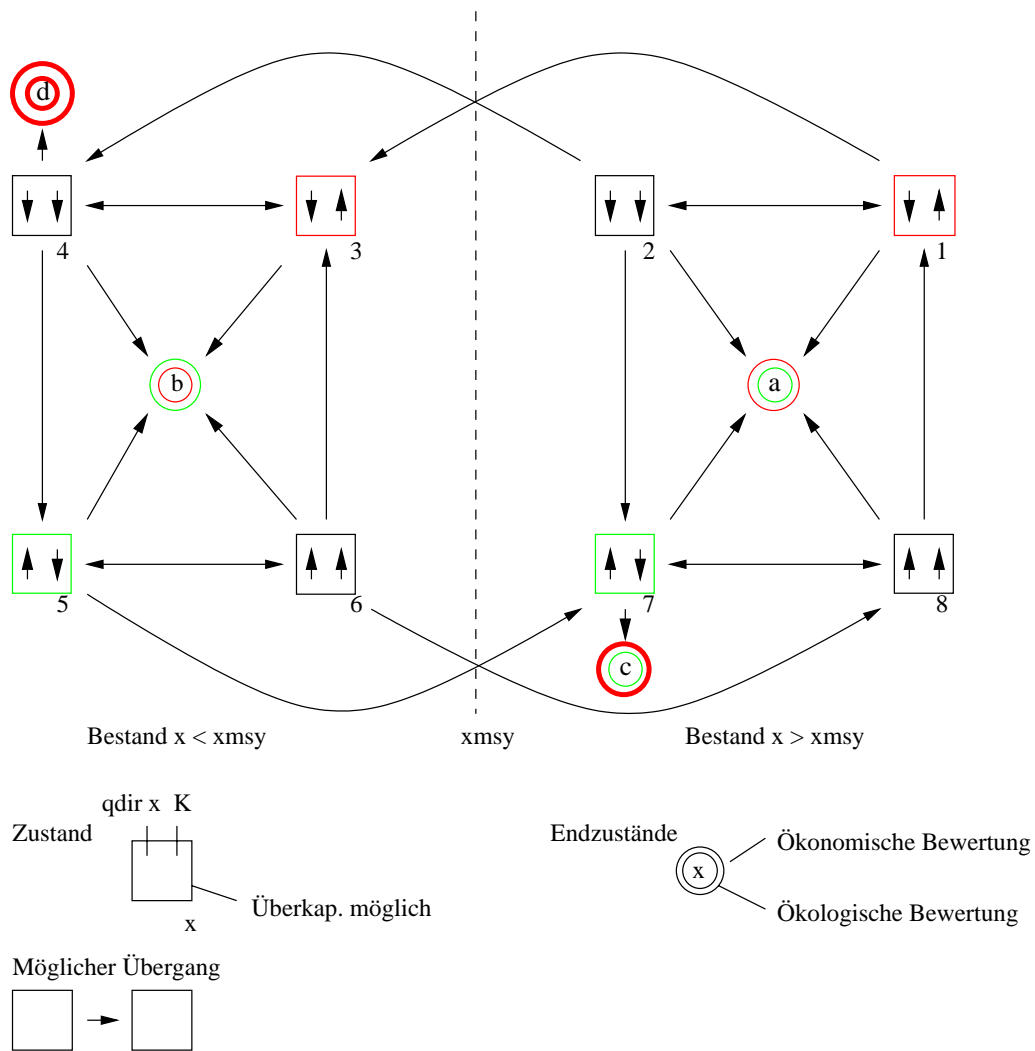


Abbildung 5.1: Nach Bestand und Kapital aggregiertes Ergebnis. Kästchen repräsentieren Äquivalenzklassen möglicher Zustände, Pfeile mögliche Übergänge (weitere Erläuterungen im Text).

gleichzeitig konstant werden oder eine Größe genau bei einer Grenzmarke konstant wird. Derartige Ereignisse dürften in der Praxis äußerst selten sein, da hierzu mehrere reellwertige Größen gleichzeitig einen vorgegebenen Wert exakt annehmen müssten. Selbst eine gezielte Steuerung des Systems in einen solchen Zustand kann angesichts der bestehenden Unsicherheiten kaum gelingen. Die einzigen beibehaltenen „Grenzfälle“ sind diejenigen, in denen der Bestand ausgerottet wird (*d*), in denen die Industrie zusammenbricht (*c*), und in denen alle Variablen aufgrund der Beschränkungen zugleich dauerhaft konstant werden (*a* und *b*).

Bei diesem Ergebnis handelt es sich um einen gerichteten Graphen. Jede Ecke repräsentiert eine Äquivalenzklasse auf der Menge der Zustände. Wenn es eine Lösung gibt, die einen Zustand der Klasse *i* annimmt, und an einer späteren Stelle eine Zustand der Klasse *j*, so wird eine Kante von *i* nach *j* eingeführt, wenn ihre Zustände dazwischen keiner

anderen Klasse angehören. Die Ecken des Graphen lassen sich als mögliche „aggregierte“ Zustände des Systems interpretieren, die Kanten als mögliche Übergänge zwischen aggregierten Zuständen. Die Ecken bzw. Äquivalenzklassen werden im folgenden der Einfachheit halber oft wieder als Zustände bezeichnet. In der Abbildung eines solchen Graphen erfolgt die Anordnung der Ecken nach den qualitativen Größen der relevanten Variablen. In Abb. 5.1 ist x entlang der Abszisse und K entlang der Ordinate aufgetragen. Die angegebenen Pfeile indizieren die qualitative Richtung von x und K . Auf die Färbung der Graphen wird im nächsten Abschnitt näher eingegangen. Sie bezieht sich auf die Bewertung von Management-Optionen.

Nimmt man die Variable h hinzu, erhält man eine größere Zahl an Äquivalenzklassen (hier: 20), womit ein differenzierteres Bild möglich ist (siehe Abb. 5.2). Hier sind die Ecken entlang der Ordinate nach der qualitativen Größe von h aufgetragen, Zustände mit steigendem K werden oberhalb von ansonsten gleichen Zuständen eingezeichnet, in denen K fällt. Auch hier wurden einige Äquivalenzklassen entfernt, wenn zwei oder mehr Größen gleichzeitig konstant werden oder eine Größe genau bei einer Grenzmarke konstant wird.

Es stellt sich natürlich die Frage, wie es zu einer so großen Lösungsvielfalt kommt, die sich letztlich doch recht übersichtlich darstellen lässt. Es zeigt sich, dass sich viele Lösungen nur aufgrund von sog. *occurence branching* unterscheiden (Tokuda 1996; Clancy 1997). Liegen in einem qualitativen Zustand zwei Variablen x und y jeweils zwischen zwei Grenzmarken und sind sie nicht konstant, dann können sie im nächsten Zustand eine der Grenzmarken erreichen. Gibt es keine Beschränkung, die hierbei Gleichzeitigkeit erzwingt, gibt es drei mögliche Folgezustände: Zuerst erreicht x die Grenzmarke, dann folgt y ; zuerst erreicht y die Grenzmarke, und dann folgt x ; oder diese Ereignisse finden gleichzeitig statt. Mit zunehmender Anzahl an Variablen und Grenzmarken nimmt die Anzahl der Möglichkeiten überproportional zu. Die Bildung von Äquivalenzklassen, bei denen weniger Variablen betrachtet werden müssen, machen die Lösungsmenge damit wesentlich überschaubarer.

5.4 Ergebnisse

Im folgenden werden einige Ergebnisse des Modells anhand der Graphen 5.1 und 5.2 diskutiert. Hierbei wird die formale Perspektive des mathematischen Modells schrittweise verlassen, da das Modell im Rahmen des Modellfokus bzw. der Modellziele interpretiert werden muss. Hierzu werden zuerst einige Eigenschaften zusammengefasst. Dann erfolgt ein Vergleich mit den in Kapitel 3 referierten Modellen; es wird diskutiert, ob es sich lohnt, den Kapitalstock zu modellieren, und ob sich mit dem Modell myopischer Ressourcennutzung empirische Daten besser rekonstruieren lassen. In diesem Vergleich werden zwei mögliche Szenarien herausgearbeitet: *Stabilisierung auf niedrigem Niveau* und *Irreversibler Kollaps*. Dies leitet zu abschließenden Betrachtungen bezüglich des Managements einer marinen, regenerierbaren Ressource über.

Hierzu ist es notwendig, die möglichen Systemzustände zu bewerten. Die Bewertungen ergeben sich auch aus dem Modellziel und sind in den Abb. 5.1 und 5.2 farblich markiert. Grundsätzlich ist anzumerken, dass Bewertungen durch das Modellziel keineswegs vollständig determiniert sind, da etwa Überkapazitäten schwer zu operationalisieren sind, und zum Teil konkurrierende Managementziele vorliegen (Clark 1985).

- Die Zustände a bis d sind jeweils ökonomisch und ökologisch bewertet. Ein Res-

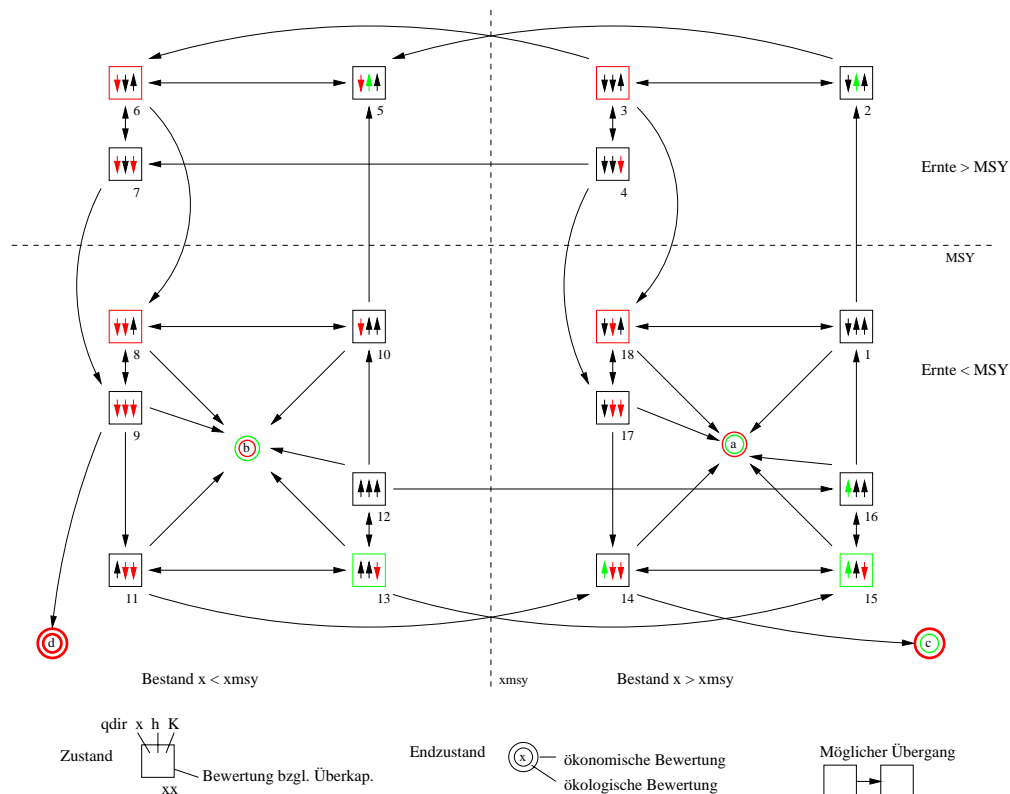


Abbildung 5.2: Nach Bestand, Ernte und Kapital aggregiertes Ergebnis. Zustände, bei denen trotz sinkender Erntemenge der Kapitalstock steigt, sind rot gefärbt (Bildung von Überkapazitäten), im umgekehrten Fall grün (weitere Erläuterungen im Text).

sourcenbestand oberhalb von x_{MSY} wird ökologisch positiv eingeschätzt (grün), im Gegensatz zu einem Bestand unterhalb dieser Grenzmarke (rot), da erst hier ein Ausrottungsrisiko besteht. Die ökonomische Bewertung ist negativ (rot), wenn der Kapitalstock verschwindet, die Industrie sich also auflöst, und positiv (grün), wenn sie sich stabilisiert. Eine Stabilisierung bei einem Bestand über x_{MSY} (der Zustand a) ist ökonomisch ebenfalls negativ, da es aus Sicht der Industrie sinnvoller wäre, das System in den Zustand b zu bringen. Die dadurch abschöpfbare (einmalige) zusätzliche Ernte kann dauerhafte Gewinne erzielen, wenn deren Erlöse etwa am Finanzmarkt angelegt werden.

- Zustände, bei denen Überkapazitäten aufgebaut werden, sind rot markiert; wo sie abgebaut werden dagegen grün.
- Ein sinkender Bestand gilt aufgrund des erhöhten Ausrottungsrisikos als negativ, wenn er bereits unter x_{MSY} liegt. Dessen Erholung ist dagegen erst als positiv zu bewerten, wenn diese Grenzmarke überschritten wurde. Analog ist eine sinkende Ernte unter MSY rot, eine steigende Ernte über MSY grün markiert. Dies kennzeichnet eine besonders schlechte oder gute Einkommenssituation in der Industrie. Ein sinkender Kapitalbestand wurde generell rot gekennzeichnet. Hier verkleinert sich die Industrie,

was unter Umständen zwar die ökonomische Effizienz erhöht (in den Zuständen 13 und 14), aber z.B. mit sozialen Spannungen in Folge von Entlassungen einhergehen kann.

5.4.1 Merkmale des Systemverhaltens

Die Graphen zeigen, dass trotz der recht allgemeinen Modellannahmen nicht alle „kombinatorisch möglichen“ Zustände und Übergänge auftreten.

- Der Ressourcenbestand kann nur unter x_{MSY} sinken, wenn die Ernte MSY überschreitet. Solange die Ernte so hoch bleibt, ist aber keine Bestandserholung mehr möglich.
- Wenn der Bestand x ab- und die Erntemenge h zunimmt (Ecken 1, 2, 5 und 10 in Graph 5.2), so expandiert notwendigerweise auch der Kapitalstock. Er sinkt hingegen immer dann, wenn die Ernte sinkt und der Bestand sich erholt (Ecken 11 und 14).
- Das System gelangt erst dann in die kritischen Zustände c bzw. d , wenn es vorher die Zustände 14 bzw. 9 durchlaufen hat.
- Bei einer Bestandserholung über die Grenzmarke x_{MSY} hinaus und einer dennoch gleichzeitig sinkender Erntemenge (Kante von 11 nach 14), kann das System anschließend über Zustand 14 in den kritischen Zustand c übergehen. Dies ist jedoch nicht möglich, wenn zum Zeitpunkt der Bestandserholung die Erntemenge wieder zunimmt (Kanten von 12 nach 16 oder von 13 nach 15).
- Nimmt die Ernte bei noch fallendem Bestand mit Erhöhung des Kapitals zu (Ecke 10), und läuft das System nicht in den stabilen Zustand b , so wird die Erntemenge die Grenzmarke MSY wieder überschreiten, ohne dass es zu einer signifikanten Bestandserholung kommt (Übergang zu 5). Es gibt außer 10 und b jedoch keine anderen Zustände, die eine Erholung über x_{MSY} hinaus verhindern.
- In einer Fischerei-Wirtschaft, die sich anfangs im Zustand 1 befindet, werden notwendigerweise Überkapazitäten aufgebaut (wenn sie nicht direkt in den stabilen Zustand a übergeht). Denn wenn es nicht direkt Zustand 18 folgt, geht es in Zustand 2 über. Von dort aus können die in Zustand 3 entstehenden Überkapazitäten nur vermieden werden, wenn das System Zustand 5 annimmt, dessen einziger Nachfolger der Zustand 6 ist, in dem ebenfalls Überkapazitäten aufgebaut werden. Jeder mögliche mit Zustand 1 beginnende Kantenzug (bis auf einen Grenzfall) durchläuft also eine Ecke, die das Entstehen von Überkapazitäten repräsentiert.
- Ein Abbau von Überkapazitäten ist zur Erholung des Ressourcenbestandes über x_{MSY} nicht notwendig (Übergang von 11 nach 14). Dadurch wird jedoch nicht der kritische Zustand 14 vermieden. Kommt der Abbau von Überkapazitäten dagegen zu früh zum Erliegen (Übergang von 11 nach 12), besteht die Möglichkeit, dass über Zustand 10 eine signifikante Bestandserholung ausbleibt.

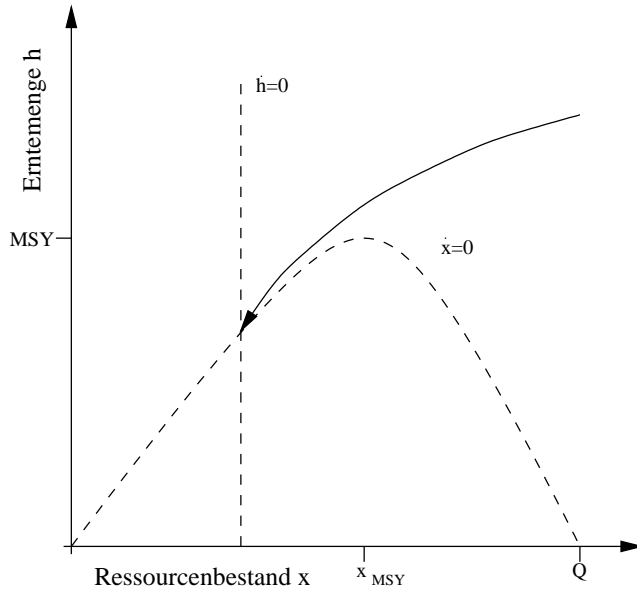


Abbildung 5.3: Lösungstrajektorie des einfachen Fischereimodells ohne Berücksichtigung von Kapital (vgl. Abschnitt 3.3.2).

5.4.2 Vergleich mit Modellen ohne Kapitalbestand

Inwieweit der Kapitalbestand in Fischereimodellen einbezogen werden sollte, wird durch Vergleich mit dem einfachen Fischereimodell (vgl. Abschnitt 3.3.2), welches den Kapitalbestand nicht berücksichtigt, erörtert. Dessen Lösung (mit Zeithorizont $T \rightarrow \infty$) ist in Abbildung 5.3 dargestellt.

Die wiedergegebene Trajektorie stellt die einzige mögliche Lösung (unter spezifizierten Parametern und Funktionen) dar. Man beachte, dass das System einem Gleichgewicht zustrebt, welches unterhalb von x_{MSY} liegt. Bis dahin fallen Bestand und Ernte monoton. Setzt man für h und x die qualitativen Wertebereiche des Modells myopischer Ressourcennutzung an, lautet die Abstraktion dieser Lösung

$$\left(\left[\begin{array}{l} (x_{MSY}, \infty), - \\ (h_{MSY}, \infty), - \end{array} \right], \left[\begin{array}{l} x_{MSY}, - \\ (h_{MSY}, \infty), - \end{array} \right], \left[\begin{array}{l} (0, x_{MSY}), - \\ (h_{MSY}, \infty), - \end{array} \right], \left[\begin{array}{l} (0, x_{MSY}), - \\ h_{MSY}, - \end{array} \right], \left[\begin{array}{l} (0, x_{MSY}), - \\ (0, h_{MSY}), - \end{array} \right], \left[\begin{array}{l} (0, x_{MSY}), 0 \\ (0, h_{MSY}), 0 \end{array} \right] \right).$$

Dieses Verhalten lässt sich im Graphen 5.2 nur mit Einschränkungen rekonstruieren. Für den ersten Zustand kommen die Ecken 3 und 4 in Betracht, für den dritten die Ecken 6 und 7, sowie für den fünften die Ecken 8 und 9. Der Gleichgewichtszustand ist b . Damit gibt es mehrere Möglichkeiten, in denen das Modell myopischer Ressourcennutzung mit diesem Resultat zusammenfällt. Deutlich wird jedoch der schwer zu erklärende Anfangszustand des einfachen Modells. Bei diesem bleibt unerklärt, wie das System in den Zustand 3 bzw. 4 gekommen ist. Hierzu müssten Fangkapazitäten aufgebaut worden sein, was den Zustand 1 oder zumindest 2 voraussetzt. Somit beleuchtet das Modell ohne Kapital nicht die Anfangsphase einer Fischerei-Wirtschaft, in der Management-Optionen möglicherweise schon greifen können (siehe Abschnitt 5.4.4). Außerdem wird deutlich, dass dieses quantitative Modell lediglich ein spezielles Verhalten wiedergibt, infolge des Kapitalbestandes aber auch andere Effekte auftreten können. So muss das System mit Kapital nicht notwendig aus Zustand 8 bzw. 9 direkt in den Gleichgewichtszustand übergehen. Im nächsten Abschnitt

wird eine Fallstudie erläutert, die sich mit dem Modell ohne Kapital nicht rekonstruieren lässt, da dort durch sinkenden Fang bei gleichzeitig sinkendem Kapital eine Erholung der marinen Ressource möglich ist.

Grundsätzlich induziert das Kapital Trägheit im System, denn das Kapital passt sich nicht direkt einem gesunkenen Bestand an. Deutlich wird dieser Effekt auch, wenn man die Zustände 2 und 5 betrachtet, in der die Ernte trotz sinkendem Bestand zunimmt. Insbesondere ist aber zu beachten, dass selbst bei sinkendem Bestand und sinkender Erntemenge zeitweise noch Investitionen getätigt werden (erst beim Übergang von 6 auf 7 oder gar 8 auf 9 werden die Nettoinvestitionen negativ). Auf diese Trägheitsphänomene hat auch schon McKelvey (1986) hingewiesen. Ohne die Berücksichtigung von Kapital kann dies nicht wiedergegeben werden.

5.4.3 Rekonstruktion einer Fallstudie

In diesem Abschnitt wird das Szenario *Stabilisierung auf niedrigem Niveau* charakterisiert, bei dem nach anfänglichen hohem Ressourcenbestand die Ressource stark reduziert wird, das System am Ende jedoch in den stabilen Systemzustand *b* übergeht. Mit diesem Szenario kann die historische Entwicklung des Walfangs nach dem zweiten Weltkrieg rekonstruiert werden, was auch McKelvey (1986) mit seinem Modell versucht hat (vgl. Abschnitt 3.3.3). Damit wird unter Beweis gestellt, dass das qualitative Modell myopischer Ressourcennutzung empirische Daten qualitativ wiedergeben kann, und dass die verwendete Methode numerischen Simulationen nicht nachsteht, im Vergleich sogar bessere Ergebnisse erzielen kann.

Bestands- und Kapitalentwicklung

Im Graphen 5.4 beginnt das Szenario im Zustand 1, und entwickelt sich von dort über 3–4–5 nach *b*. Zuerst nimmt der Kapitalstock zu, während gleichzeitig die Ressourcenbestände bis unter x_{MSY} reduziert werden (Zustand 3), bis die Investitionsneigung soweit nachlässt, dass der Kapitalstock sinkt (Zustand 4). Schließlich kommt es zur Erholung der marinen Ressource (Zustand 5), die dann aber in ein Gleichgewicht mit der Erntemenge gelangt,

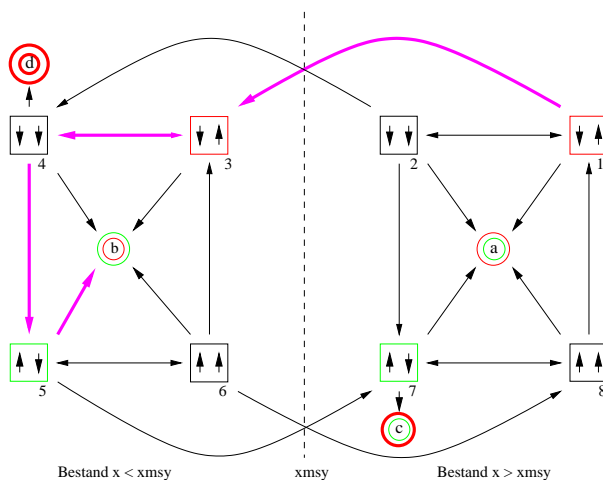


Abbildung 5.4: Das Szenario *Stabilisierung auf niedrigem Niveau* in dem nach Bestand und Kapital aggregierten Ergebnis (vgl. Abb. 5.1). Die auftretenden Übergänge sind rot markiert.

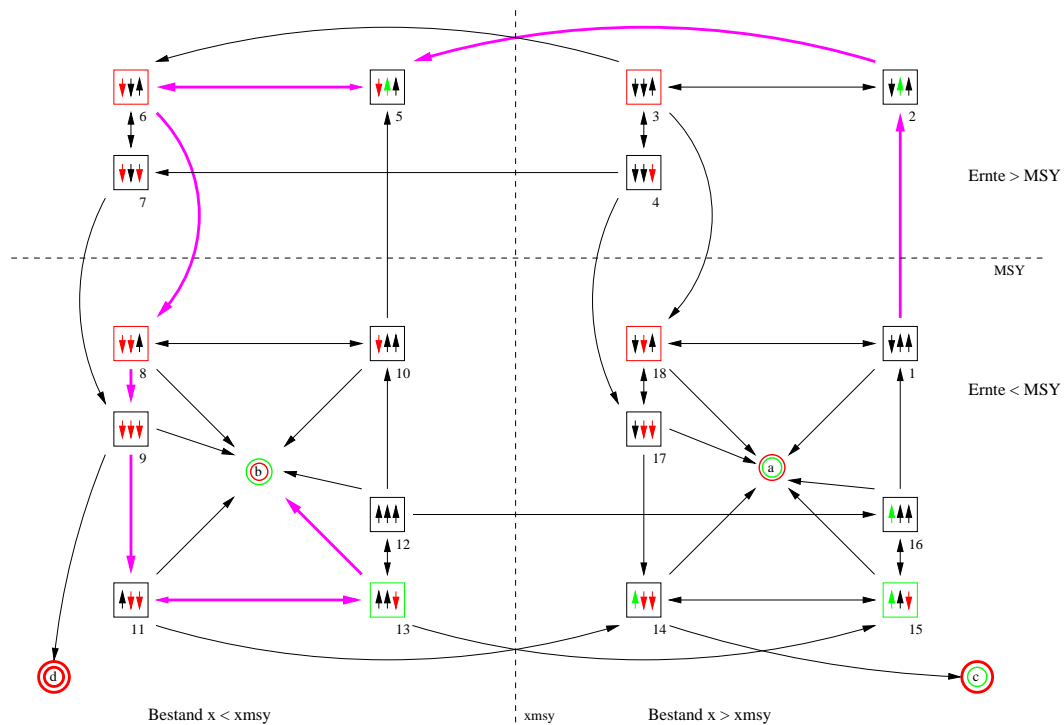


Abbildung 5.5: Das Szenario *Stabilisierung auf niedrigem Niveau* in dem nach Bestand, Ernte und Kapital aggregierten Ergebnis (vgl. Abb. 5.2). Die auftretenden Übergänge sind rot markiert.

wenn der Kapitalstock konstant wird (Zustand *b*). In diesem Zustand werden die nur noch geringen Abschreibungen durch Ersatzinvestitionen gerade ausgeglichen.

Entwicklung der Fangmenge

Ein differenzierteres Bild ergibt sich, wenn das Szenario im Graphen 5.2 verfolgt wird, da so zusätzlich der Verlauf der Fangmenge abgelesen werden kann (siehe Abb. 5.5).

Das System hat den anfänglichen Zustand 1, und entwickelt sich in der Folge 2 – 5 – 6 – 8 – 9 – 11 – 13 zum Endzustand *b*. Dies kann folgendermaßen interpretiert werden. In der Anfangssituation ist der Ressourcenbestand nicht ausgebeutet und nur geringe Fangkapazitäten sind vorhanden. Investitionen werden intensiviert, da die Nutzung der Ressource hohe Gewinne verspricht. Dies führt zu einer steigenden Ernte, da der erst langsam sinkende Bestand durch die erhöhte Effektivität der Fangmethoden mehr als kompensiert wird. Daher überschreitet die Ernte den maximalen nachhaltigen Ertrag MSY . In der Folge sinkt der Bestand unter x_{MSY} , noch bevor die Ernte ihr Maximum erreicht. Die Nettoinvestitionen bleiben trotz sinkender Ernte positiv, die erst später den maximalen nachhaltigen Ertrag (MSY) unterschreitet. Erst danach beginnt der Kapitalstock zu sinken. Dieser Trend setzt sich fort, bis die Ernte in Folge des geringen Ressourcen- und Kapitalbestandes so weit sinkt, dass sich die marine Ressource wieder erholen kann. Der Fang nimmt erst wieder zu, wenn die Kosten aufgrund der Ressourcenerholung trotz fallendem Kapital sinken. Das Gleichgewicht wird erreicht, wenn der Kapitalbestand auf so niedrigem Niveau ist, dass die wieder leicht gestiegenen Erlöse die Abschreibungen ausgleichen können.

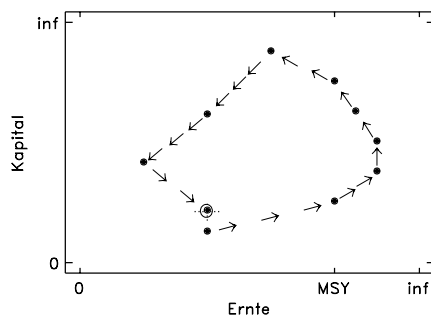


Abbildung 5.6: Qualitatives Phasendiagramm für Kapital K und Ernte h im Szenario der *Stabilisierung auf niedrigem Niveau*. Die im Diagramm wiedergegebenen Punkte sind qualitativ zu verstehen, d.h. man erhält ein äquivalentes Phasendiagramm, wenn die Punkte verschoben werden ohne ihre Lage relativ zu den Grenzmarken und die qualitative Richtung zu den Nachbarpunkten zu ändern. Die qualitativen Richtungen geben zugleich die Richtung der Zeit an.

Vergleich mit McKelveys Ergebnissen

McKelvey (1986) visualisiert die historischen Daten zum Walfang in einem Phasendiagramm. Um Vergleichbarkeit zu erreichen, wird das vorstehende Szenario durch sog. qualitative Phasendiagramme dargestellt.

Das qualitative Phasendiagramm für den Zusammenhang zwischen Ernte h und Kapital K (siehe Abb. 5.6) verdeutlicht gut das Auftreten von Überkapazitäten. Im Laufe der Systementwicklung werden identische Erntemengen bei unterschiedlichem Kapitalstock erreicht, es liegt hier also ein Unterschied in der ökonomischen Effizienz vor. Der Vergleich mit der Entwicklung des Walfangs erfolgt anhand von Abbildung 5.7.

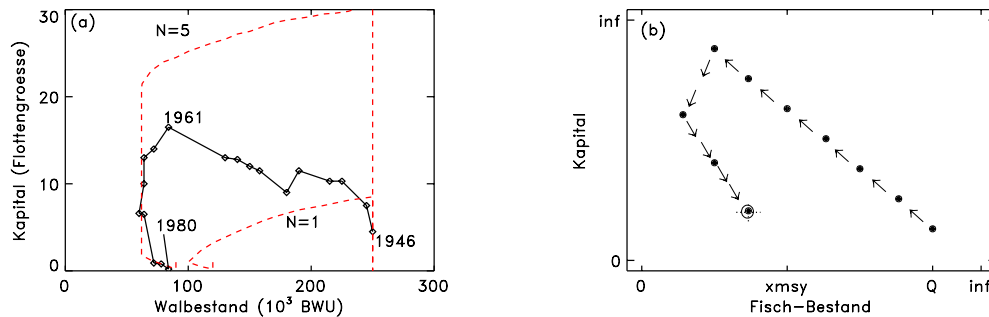


Abbildung 5.7: Historische Entwicklung des Walfangs und dessen Rekonstruktion durch McKelvey (1986) (a), sowie durch das Modell myopischer Ressourcennutzung (b). Die durchgezogene Linie stellt die Entwicklung des Walfangs, die gestrichelten Ergebnisse von McKelveys Modells dar (N bezeichnet die Anzahl der Unternehmen). Das qualitative Phasendiagramm für Bestand x und Kapital K entspricht dem Szenario der *Stabilisierung auf niedrigem Niveau*.

Mit McKelveys Modell kann der Zusammenbruch der Fangkapazitäten quantitativ recht gut bestimmt werden. Die Entwicklung des Kapitalbestandes bis zu dessen Maximum wird dagegen weder quantitativ noch qualitativ wiedergegeben. Das qualitative Modell myopischer Ressourcennutzung dagegen reproduziert die Daten qualitativ wesentlich besser als das ältere Modell; der Verlust quantitativer Information ist nur an einer Stelle bemerkbar. Im übrigen sei zur Wahl der Parameter in McKelveys Modell auf die kritischen Bemerkungen in Abschnitt 3.4 verwiesen.

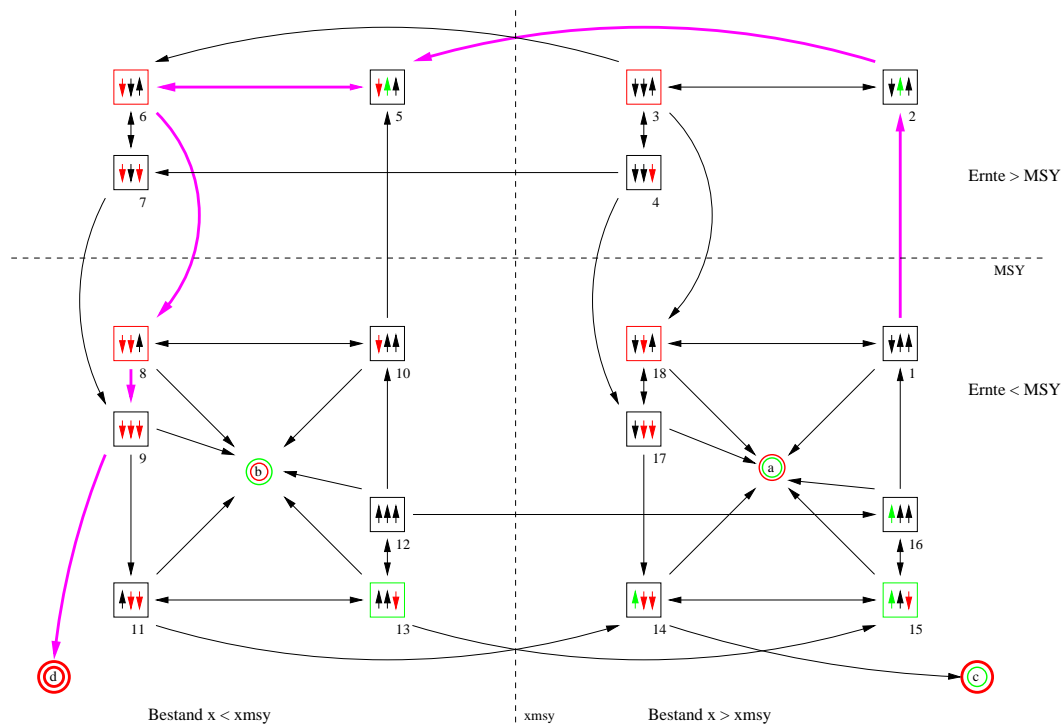


Abbildung 5.8: Das Szenario *Irreversibler Kollaps* im nach Bestand, Ernte und Kapital aggregierten Ergebnis (vgl. Abb. 5.2). Die auftretenden Übergänge sind farblich markiert.

5.4.4 Management-Optionen

Zur Untersuchung von Management-Optionen wird ein weiteres Szenario vorgestellt, in dem es zum Kollaps kommt. Durch seinen Vergleich mit dem Szenario im vorhergehenden Abschnitt wird anhand der Ergebnisse des qualitativen Modells beispielhaft auf das Management einer nachwachsenden marinen Ressource eingegangen.

Irreversibler Kollaps

Das Szenario *Irreversibler Kollaps*, bei dem sowohl die genutzte Ressource ausgerottet wird, als auch die Fischerei-Wirtschaft zusammenbricht, ist in Abb. 5.8 dargestellt. Es läuft in den Endzustand *d*, der irreversibel ist, da sich die Ressource (auf lange Sicht) nicht mehr erholen wird, und ihre Nutzung damit dauerhaft unmöglich geworden ist. Das gleiche gilt für die Industrie und die dort Beschäftigten, denen damit eine Ernährungs- bzw. Einkommensquelle versiegt ist.

Das führt vom Anfangszustand 1 über 2 – 3 – 6 – 8 – 9 nach *d*. Der direkte Vergleich mit der *Stabilisierung auf niedrigem Niveau* zeigt, dass sich die Verhalten bis zum Zustand 9 qualitativ nicht unterscheiden. Es kommt also in beiden Fällen zur Abnahme des Kapitalstocks und der Erntemenge. Im Kollaps-Fall kann sich der Fischbestand jedoch nicht mehr erholen und eine Erhöhung der Erntemenge findet infolgedessen nicht statt. Letztlich wird der Bestand ausgerottet. Offen bleibt die Frage, wie es dazu kommt, dass sich das System in den Zustand *d* bewegt, und nicht etwa nach 11 wie im anderen Fall.

Gründe für den Kollaps

Ein Kollaps des Systems ist aus verschiedenen Gründen möglich, die schon angelegt sein können, bevor der kritische Zustand 9 (vgl. Abb. 5.8) erreicht ist. Allgemein ist er jedoch dadurch gekennzeichnet, dass keine angemessene Anpassung des Kapitalstocks an den niedrigen Bestand erfolgt. Möglichen Ursachen hierfür werden nun im einzelnen angeführt.

- Bei sehr kostengünstigen bzw. effizienten Fangtechnologien können auch noch bei sehr niedrigen Ressourcenbeständen Gewinne erzielt werden, so dass kein Anreiz zum Investitionsverzicht besteht.
- Eine Bestandserholung ist erst möglich, wenn der Fang unter die natürliche Regeneration der Ressource fällt. Ist diese sehr gering, kann sich die Population erst zu einem späten Zeitpunkt erholen. Das setzt die Ressource zusätzlichen Risiken aus (bei geringen Populationen kann sogar - etwa durch Inzucht - eine negative Regeneration vorliegen).
- Auch bei teuren Fangtechnologien und guter Regenerationsfähigkeit kann die Erholung der Ressource unmöglich werden. Ist der Kapitalbestand in seinem Maximum sehr hoch, sinkt aufgrund dessen langsamer Entwertung die resultierende Fangmenge zu langsam, um sich dem sinkenden Ressourcenbestand anzupassen. Daher findet auch noch kurz vor der Ausrottung eine intensive Fangtätigkeit statt. Besonders stark ausgeprägte Überkapazitäten können etwa durch geringe Investitionskosten bedingt sein.

Dass die beiden Szenarien bis zum Zustand 9 qualitativ den gleichen Verlauf haben, sollte an dieser Stelle nicht irritieren. Aufgrund der Unsicherheiten in der Datenlage ist der exakte Ressourcen- bzw. Kapitalbestand in der Regel nicht bekannt. Der gleiche qualitative Wert kann sehr verschiedenen quantitative abstrahieren. Außerdem können die Übergänge in beiden Szenarien zu ganz verschiedenen Zeitpunkten stattfinden.

Diese Analyse macht deutlich, dass Unterschiede zwischen den Szenarien bereits in einer frühen Phase der Systementwicklung angelegt sein können, obwohl sie qualitativ erst später sichtbar werden. Das deutet auf die Gefahren hin, die Unsicherheiten für das Management einer regenerierenden marinen Ressource darstellen, da wichtige Sachverhalte nicht immer rechtzeitig erkannt werden können. Nachhaltige Management-Optionen sollten diesen Umstand berücksichtigen.

Kritische Zustände

Neben einem Kollaps lassen sich weitere kritische Stellen im möglichen Systemverhalten feststellen. Es zeigt sich, dass im Zeitlauf ganz verschiedene Probleme auftauchen können.

- In Abschnitt 5.4.1 wurde festgestellt, dass Überkapazitäten immer dann entstehen, wenn die Expansion der Fischerei-Wirtschaft nicht von vornherein begrenzt wird. Auch ein Absinken des Bestandes unter x_{MSY} kann nur verhindert werden, wenn die Ernte von Anfang an unter dem maximalen nachhaltigen Ertrag bleibt. Beides wäre nur gegen ökonomische Interessen durchsetzbar, deren Berücksichtigung das Entstehen von Überkapazitäten also unvermeidbar macht.

- Der letzte Abschnitt kam zu dem Ergebnis, dass der Umfang der Überkapazitäten wesentlich bestimmt, wohin sich das System im kritischen Zustand 9 entwickelt. Diese risikobehaftete Situation kann nicht vermieden werden, wenn erst einmal Überkapazitäten entstanden sind. Der einzige Ausweg ist eine Entwicklung des Systems über die Zustände 6 und 8 nach *b*. Hierbei würde bis zuletzt investiert, so dass sich die Ernte wieder stabilisiert und der Bestand trotzdem nicht weiter sinkt. Dies ist nur dann möglich, wenn durch zusätzliches Kapital bewirkte Kostensenkungen eine rentable Befischung auf niedrigem Niveau zulassen. Sieht man von diesem „glücklichen“ Fall ab, kommt die Industrie irgendwann in eine Situation, bei der das Kollaps-Risiko droht.
- Wenn dieses Risiko umgangen wird, kann über Zustand 12 eine umfangreichere Bestandserholung verhindert werden. Dies tritt ein, wenn sich der Kapitalstock erhöht, bevor der Bestand die kritische Größe x_{MSY} erreicht hat. Dann kann das System über die Zustände 10 und 5 in Zustand 6 wieder Überkapazitäten aufbauen und erneut in den Risiko-Zustand 9 geraten. Dieser kann nun sogar noch kritischer als „beim ersten Durchlauf“ sein, da sich der Bestand zwischenzeitlich nicht richtig erholen konnte.
- Dem Zustand 9 vergleichbar ist Zustand 14, da er das Risiko eines wirtschaftlichen Kollaps (Zustand *c*) birgt. Vermeiden kann man ihn, wenn das System von Zustand 11 in Zustand 13 überführt wird, da man von hier aus den Zustand 14 „überspringen“ kann (wenn die Erholung des Kapitalstocks nicht zu früh erfolgt, was zu 12 führen würde). Diese Entwicklung, bei der Überkapazitäten (mit den damit verbundenen sozialen Spannungen) abgebaut werden, tritt ein, wenn die Erntemenge sich erholt, bevor der Ressourcenbestand den Grenzmarken-Wert von x_{MSY} erreicht.

Schlussfolgerungen für das Management

Insgesamt zeigen die Ergebnisse des Modells eine eher pessimistische Einschätzung des Systems. Wenn es nicht endgültig in einen Gleichgewichtszustand gelangt (was in der Praxis nicht auftreten dürfte, wenn man vom Kollaps der Fischerei-Wirtschaft bzw. der Resource absieht), finden sich vielfältige Zyklen in den ansonsten stark zusammenhängenden Graphen, die das aggregierte Systemverhalten beschreiben (vgl. Abb. 5.1 und 5.2). Das bedeutet, dass kritischen Zustände nie endgültig vermieden werden, sondern immer wieder auftreten können. Die offen zu Tage tretenden Probleme des Systems ändern sich dabei jedoch im Zeitverlauf, so dass der Eindruck entsteht, es müssten immer wieder verschiedene Management-Instrumente eingesetzt werden.

Die genauere Analyse zeigt jedoch, dass die wechselnden Probleme schon in früheren Systemzuständen angelegt sein können. Daher ergibt sich ein vorbeugender, frühzeitiger Handlungsbedarf (wie etwa auch Mace (1996) anmerkt). Auf der Input-Seite können durch rechtliche Rahmenbedingungen die angesetzten Kostenfunktionen verändert werden, etwa indem die Ernte mit Steuern belegt, Investitionen verteuert, oder aber subventioniert werden. Hierbei werden die qualitativen Eigenschaften des Modells jedoch nicht notwendig verändert. Vielmehr ändert sich die Tendenz, mit dem das System, wenn es sich in einem kritischen Zustand befindet, in diesen oder jenen Folgezustand übergeht. Eine derartige Beeinflussung des Systems kann man daher auch Parameter-Management nennen. Fundamentaler sind Eingriffe, die die qualitative Struktur des Modells ändern, und im Gegensatz zum

vorherigen Ansatz als Struktur-Management bezeichnet werden können. Hier könnten sich Chancen eröffnen, kritische Zustände zu umgehen.

Mit Hilfe der Methode der QDGL ist es gelungen, eine differenziertere Analyse der Übernutzung mariner Ressourcen zu gewinnen, als dies mit früheren Modellen möglich war. Hierbei ist es nicht notwendig, auf unsichere Daten zurückzugreifen. Für das Management von Ressourcen bei Berücksichtigung von Überkapazitäten ergibt sich, dass einfache Instrumente, die lediglich eine Zielgröße verwenden, kaum zum Erfolg führen können. Jedes Teilprobleme erfordert eigene Maßnahmen, so dass ein geeigneter *policy mix* gefunden werden muss. Dies kann jedoch nicht heißen, dass je nach Systemzustand eine Maßnahme die andere ablöst, was durch die Notwendigkeit eines vorausschauenden Managements gezeigt wurde. Stets müssen verschiedene Optionen kombiniert werden.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

Ziele der Arbeit waren die mathematische Darstellung der Theorie der qualitativen Differentialgleichungen und ihre Anwendung in der Bioökonomik, insbesondere um das Potential von QDGL als Modellierungswerkzeug einschätzen zu können. Es wurde gezeigt, dass durch diese Methode tiefer gehende Erkenntnisse zum Problem der Übernutzung mariner regenerierender Ressourcen durch Überkapazitäten gewonnen werden können. Eine anschauliche Darstellung der Ergebnisse wurde entwickelt. Zur qualitativen Modellbildung war es zunächst notwendig, das Problem zu beschreiben und den Ansatz bestehender Modelle kennen zu lernen und zu erweitern. Dabei stellte sich auch die Bedeutung unsicheren Wissens heraus. Eine allgemeine Analyse und modelltheoretische Einbettung dieses Phänomens führte zu grundlegenden Argumenten für die Verwendung qualitativer Differentialgleichungen.

Das Modell myopischer Ressourcennutzung

In dieser Arbeit ist es gelungen, ein bioökonomisches Modell myopischer Ressourcennutzung zu entwickeln, welches Fangkapazitäten berücksichtigt und zugleich allgemeinere Annahmen als vergleichbare Vorgängermodelle (insbesondere McKelvey 1986) macht, wobei analytische Probleme dieser Modelle umgangen werden konnten. Dabei wurde, trotz der bestehenden metrischen und strukturellen Unsicherheiten, der Schwerpunkt auf die Dynamik des Modells gelegt, was bislang nur wenig berücksichtigt wurde.

Anhand der Lösungsmenge der aufgestellten qualitativen Differentialgleichung ist es möglich, typische Szenarien und kritische Zustände des Systems zu identifizieren. Es zeigt sich, dass Fangkapazitäten in einem Modell berücksichtigt werden sollten, da sich dann differenziertere Entwicklungsmuster einer Fischerei-Wirtschaft und weitere Gefährdungspotentiale für den Ressourcenbestand abschätzen lassen.

Die empirische Relevanz des Modells konnte anhand der qualitativen Rekonstruktion historischer Daten aus dem Walfang gezeigt werden. Hierbei wird eine deutliche Verbesserung gegenüber dem Vorgängermodell von McKelvey erzielt. Die Ergebnisse zeigen, dass nicht nur Kapazitäten, sondern auch nichtlineare Investitionskosten von großer Bedeutung für die Systemdynamik sind.

Fischerei-Management

Da die Identifikation von kritischen Situationen in der Entwicklung einer Fischerei-Wirtschaft gelungen ist, können Empfehlungen für das nachhaltige Management einer regenerierenden marinen Ressource abgeleitet werden. Zudem ergeben sich weitere für das Management wichtige Fragestellungen. Von Interesse sind z.B. die Umstände, die die Erholung einer stark erschöpften Ressource ermöglichen bzw. verhindern.

Allgemein legt das Systemverhalten nahe, eine vorausschauende Politik zu betreiben, die sich nicht auf einzelne Instrumente beschränkt, da die Herausforderungen einem Wandel in der Zeit unterliegen. Die Zielgrößen des Managements sollten Ernte und Kapital sein.

Der Begriff der Unsicherheit

Eine Typologie von unsicherem Wissen ergab, dass für bioökonomische Fragestellungen vor allem metrische und strukturelle Unsicherheiten bedeutsam sind. Da gezeigt wurde, dass Unsicherheiten immer nur relativ zu einem Modell vorliegen, kommt der Methodenauswahl eine wichtige Bedeutung zu. Gerade bei metrischen und strukturellen Unsicherheiten liegt der Vorzug von QDGL darin, dass man mit wenigen, aber dafür zielrelevanten Informationen auskommt. Dieses Ergebnis war durch genauere Begriffsbestimmungen möglich, wozu insbesondere die Bedeutung von Modellzielen untersucht wurde.

Modellierung mit qualitativen Differentialgleichungen

Die allgemeinere Frage, inwieweit qualitative Differentialgleichungen zur Modellierung genutzt werden können, ist aus der Sicht des erstellten Modells zu beantworten. Es bleibt festzuhalten, dass ein bioökonomisches Modell erfolgreich implementiert werden konnte, welches mit vertretbarem Aufwand Ergebnisse lieferte, die mit anderen Methoden bislang nicht erzielt werden konnten. Es stellte sich heraus, dass trotz sehr allgemeiner Annahmen typische Muster der Systementwicklung erkennbar sind, und nicht etwa „alles“ möglich ist. Die bestehenden Unsicherheiten ließen mit dieser Methode also nicht-triviale Aussagen für das formulierte Anwendungsproblem zu. Auch die qualitative Rekonstruktion empirischer Daten ist gelungen, wobei sich die Lösungsmenge der QDGL als geeigneter konzeptioneller Rahmen zur Einordnung von Fallstudien erweist.

Die Theorie qualitativer Differentialgleichungen

In dieser Arbeit erfolgte eine mathematisch geschlossene Darstellung der Grundlagen der QDGL. Abgesehen von einer scharfen Bestimmung der Begriffe wurden mit dem Strukturtheorem wichtige Folgenräume charakterisiert, die erst die Definition von Lösungen einer QDGL ermöglichen. Damit konnte das zentrale Vollständigkeitstheorem bewiesen werden.

Die Definition der Lösungsmenge eröffnet eine neue Perspektive auf die Methode, die bislang eher algorithmisch geprägt war. Dort wurden Lösungen als Bäume beschrieben, die mit der Software QSIM schrittweise erzeugt werden (Kuipers 1994). Die in dieser Arbeit erfolgte Aggregation der Lösungsmenge macht jedoch deutlich, dass Bäume nicht die geeignete Form der Darstellung sind. Stattdessen sollten gerichtete Graphen verwendet werden.

Perspektiven für weitergehende Arbeiten

Die in dieser Arbeit gewonnenen Ergebnisse sind nicht als abschließend aufzufassen. So sind einige Teile des Modells myopischer Ressourcennutzung erweiterungsfähig:

- Ableiten der langfristigen Investitions- und der kurzfristigen Fangentscheidung aus einer gemeinsamen Annahme über die (Binnen)rationalität der Akteure.
- Variable Preise.
- Komplexere Populationsdynamik.
- Evaluation von Management-Optionen durch deren Integration in das Modell.

Weitere Perspektiven ergeben sich aus der Analyse von unsicherem Wissen für die Anwendbarkeit von QDGL. Bei sozioökonomischen Modellen stellt sich nicht nur die Frage, ob die verwendeten Methoden für den Wissensstand angemessen sind. Wenn die modellierten Größen nicht hinreichend operationalisiert werden können, liegen unscharfe Begriffe vor. In Bezug auf qualitative Differentialgleichungen wäre zu prüfen, welche Konsequenzen die zugrunde liegende Annahme hat, dass alle Größen zumindest prinzipiell durch reelle Zahlen darstellbar sind. Ebenso könnte das Verhältnis von Unsicherheit und probabilistischen Methoden weiter abgegrenzt werden. Es entstand der Eindruck, dass Unsicherheit außerhalb der stochastischen Betrachtungsweise bislang nur wenig untersucht ist.

In dieser Arbeit wurde das qualitative Modell weitgehend mit analytischen Methoden hergeleitet. Damit sollte zwar eine Vergleichbarkeit mit bestehenden Modellen ermöglicht werden, doch diese Methoden waren auch zur ausführlichen Begründung der Modellannahmen notwendig. Zuletzt warfen die Ergebnisse des qualitativen Modells Fragestellungen auf, die über diese Methode hinausweisen. Qualitative Differentialgleichungen sollten daher als komplementär zu analytischen, aber auch numerischen Methoden angesehen werden. Numerische Informationen, die trotz bestehender Unsicherheiten in einigen Bereichen verfügbar sein können, werden in der vorliegenden Form der Theorie nicht berücksichtigt. Ansätze hierzu liegen aber mit sog. *semiquantitativen Differentialgleichungen* vor (Berleant and Kuipers 1992; Berleant and Kuipers 1998; Moldenhauer et al. 1999).

In der praktischen Anwendung der Software QSIM stellt sich die Größe der Lösungsmengen als Herausforderung dar. Obwohl gezeigt wurde, dass sie reduzierbar und übersichtlich darstellbar sind, ist dies in der bisherigen Implementation nur mit größerem Aufwand durchführbar. Insbesondere *occurrence branching* stellt sich als Ursache des Problems heraus. Um dieses zu bewältigen, liegen einige Ansätze vor, die jedoch nur bedingt zu Fortschritten führen oder bisher nicht implementiert sind (Tokuda 1996; Mallory et al. 1996; Clancy 1997). Auch semiquantitative Modellierung könnte hier weiterführen. Derzeit sind größeren Modellen durch die umfangreichen Lösungsmengen jedoch noch Grenzen gesetzt.

Inwieweit sich der gewählte Aufbau der Theorie der QDGL eignet, auch Erweiterungen wie semiquantitative Modelle und die Handhabung von *occurrence branching* (etwa durch Projektionen von Lösungen auf Teilräume) zu beschreiben, muss sich noch zeigen. Neben

der vollständigen Charakterisierung der Verhaltensräume können folgende theoretische Arbeiten viel versprechend sein:

- Inhomogene und zeitverzögerte QDGL.
- Direkte Generierung der gerichteten Graphen zur aggregierten Beschreibung des Systemverhaltens.
- Identifikation von Pseudoverhalten.
- Algebraische Manipulationen auf den Beschränkungen einer qualitativen Differentialgleichung, um Eigenschaften großer qualitativer Modelle oder qualitativer Differentialgleichungen von spezieller Form abzuleiten.

Insgesamt wurde gezeigt, dass qualitative Differentialgleichungen erfolgreich zur Modellierung unter Unsicherheit eingesetzt werden können.

Literatur

- Anderies, J. M. (2000). On modeling human behavior and institutions in simple ecological economic systems. *Ecological Economics* 35, 393–412.
- Asche, F. (1999). How long are fishermen's planning horizons? Fishermen's discount rates, restricted transferability of quotas and capacity reduction. In A. Hatcher and K. Robinson (Eds.), *Overcapacity, Overcapitalisation and Subsidies in European Fisheries*, pp. 69–77. Portsmouth: cemare.
- Bazykin, A. D. (1976). Structural and dynamic stability of model predator-prey systems. Technical Report RM-76-8, International Institute for Applied System Analysis, Laxenburg, Austria.
- Begon, M., J. L. Harper, and C. R. Townsend (1991). *Ökologie: Individuen, Populationen und Lebensgemeinschaften*. Basel: Birkhäuser.
- Ben-Haim, Y. (1997). Beyond maximum entropy: Exploring the structure of uncertainty. In H. G. Natke and Y. Ben-Haim (Eds.), *Uncertainty: Models and Measures*, Mathematical Research, pp. 11–26. Berlin: Akademie-Verlag.
- Berleant, D. and B. J. Kuipers (1992). Qualitative-numeric simulation with Q3. In B. Faltings and P. Struss (Eds.), *Recent Advances in Qualitative Physics*, pp. 3–16. Cambridge, Massachusetts: MIT Press.
- Berleant, D. and B. J. Kuipers (1998). Qualitative and quantitative simulation: Bridging the gap. *Artificial Intelligence* 95(2), 215–255.
- Beverton, R. J. H. and S. J. Holt (1957). On the dynamics of exploited fish populations. *Fisheries Investigation Series* 2(19).
- Brajnik, G. and M. Lines (1998). Qualitative modeling and simulation of socio-economic phenomena. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation* 1(1).
- Clancy, D. J. (1997). *Solving complexity and ambiguity problems within qualitative simulation*. Ph. D. thesis, University of Texas at Austin.
- Clancy, D. J. and B. J. Kuipers (1993). Behavior abstraction for tractable simulation. In *Proceedings of the 7th international workshop on qualitative reasoning about physical systems*, Orcas Islands, Washington, pp. 57–64.
- Clark, C. W. (1972). The dynamics of commercially exploited animal populations. *Mathematical Biosciences* 13, 149–164.
- Clark, C. W. (1981). Bioeconomics. In R. M. May (Ed.), *Theoretical ecology: principles and applications*, pp. 387–421. Oxford: Blackwell.
- Clark, C. W. (1985). *Bioeconomic Modelling and Fisheries Management*. New York: Wiley.
- Clark, C. W. (1990). *Mathematical bioeconomics: the optimal management of renewable resources*. München: Wiley.
- Clark, C. W., F. H. Clarke, and G. R. Munro (1979). The optimal exploitation of renewable resource stocks: problems of irreversible investment. *Econometrica* 47, 25–47.

- Clark, C. W. and R. H. Lamberson (1982). An economic history and analysis of pelagic whaling. *Marine Policy* 6, 103–120.
- Conrad, J. M. and C. W. Clark (1987). *Natural resource economics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Crean, K. (2000). The influence of boundaries on the management of fisheries resources in the European Union: case studies from the UK. *Geoforum* 31(3), 315–328.
- Deppert, W. and W. Theobald (1998). Eine Wissenschaftstheorie der Interdisziplinarität. Zur Grundlegung integrativer Umweltforschung und -bewertung. In A. Daschkeit and W. Schröder (Eds.), *Umweltforschung quergedacht*, pp. 75–106. Berlin: Springer Verlag.
- Ducrottoy, J.-P., M. Elliott, and V. N. de Jonge (2000). The North Sea. *Marine Pollution Bulletin* 41(1-6), 5–23.
- Eisenack, K. and J. Kropp (2001). Assessment of management options in marine fisheries by qualitative modelling techniques. *Marine Pollution Bulletin*. in Druck.
- El-Sabh, M., S. Demers, and L. Lafontaine (1998). Coastal zone management and sustainable development: from Stockholm to Rimouski. *Ocean and Coastal Zone Management* 39, 1–24.
- FAO (1993). Marine fisheries and the law of the sea: a decade of change. *FAO Fisheries Circular* 853. Special chapter of: The state of food and agriculture 1992.
- FAO (1998). *The State of World Fisheries and Aquaculture 1998*. Rome: Food and Agriculture Organization of the United Nations.
- Felderer, B. and S. Homburg (1991). *Makroökonomik und neue Makroökonomik*. Berlin: Springer Verlag.
- FR (2000). EU senkt Fangquoten teilweise drastisch. Frankfurter Rundschau vom 16.12.2000.
- Garcia, S. and C. Newton (1997). Current situation, trends and prospects in world capture fisheries. In E. K. Pikitch, D. D. Huppert, and M. P. Sissenwine (Eds.), *Global Trends: Fisheries Management*, pp. 3–27. Bethesda: American Fisheries Society.
- Goñi, R. (1998). Ecosystem effects of marine fisheries: an overview. *Ocean and Coastal Zone Management* 40, 37–64.
- Goodman, N. (1984). *Weisen der Welterzeugung*. München: Suhrkamp.
- Gordon, H. S. (1954). The economic theory of a common property resource: the fishery. *Journal of Political Economy* 62, 124–142.
- Hanley, N., J. F. Shogren, and B. White (1997). *Environmental economics in theory and practice*. New York: Oxford University Press.
- Hardin, G. (1968). The tragedy of the commons. *Science* 152, 1243–1247.
- Hatcher, A. (1999). The European Community's structural policy for the fishing industry. In A. Hatcher and K. Robinson (Eds.), *Overcapacity, Overcapitalisation and Subsidies in European Fisheries*, pp. 50–66. Portsmouth: cemare.
- Hatcher, A. (2000). Subsidies for european fishing fleets: the European Community's structural policy for the fishing industries 1971-1999. *Marine Policy* 24(2), 129–140.
- Heuser, H. (1991). *Gewöhnliche Differentialgleichungen: Einführung in Lehre und Gebrauch*. Stuttgart: Teubner.
- Homans, F. R. and J. E. Wilen (1997). A model of regulated open access resource use. *Journal of Environmental Economics and Management* 32, 1–21.
- Johannes, R. E. (1998). The case for data-less marine resource management: example from tropical nearshore finfisheries. *Trends in Ecology and Evolution* 13(6), 243–246.
- Kant, I. (1781). *Kritik der reinen Vernunft*. München: Suhrkamp. Gesamtausgabe von W. Weischedel, 1974.

- Kearney, R. E., N. L. Andrew, and R. J. West (1996). Some issues in the management of Australia's marine and coastal fisheries resources. *Ocean and Coastal Management* 33(1-3), 133–146.
- Kemke, C. (1991). Die Darstellung von ungenauem Wissen in taxonomischen Wissensbasen. *KI Magazin* 2, 12–19.
- Kleer, J. D. and J. S. Brown (1984). A qualitative physics based on confluences. *Artificial Intelligence* 24, 7–83.
- Knauer, U. (1992). *Mathematische Modellierung: Laster, Busse und Schweine im Mathematikstudium*. Braunschweig: Vieweg.
- Kropp, J. (1999). *Neuronale Netze und unscharfe Wissensbasen in der integrativen Umweltsystemanalyse*. Berlin: dissertation.de Verlag im Internet.
- Kuipers, B. J. (1984). Commonsense reasoning about causality: Deriving behavior from structure. *Artificial Intelligence* 24, 169–204.
- Kuipers, B. J. (1994). *Qualitative Reasoning: Modeling and Simulation with Incomplete Knowledge*. Cambridge: MIT Press.
- Kuipers, B. J. (2000). Qualitative and semi-qualitative simulation. Unveröffentlichter Vortragstext.
- Lee, E. B. and L. Markus (1967). *Foundations of Optimal Control Theory*. New York: Wiley & Sons.
- Linde, R. (1988). *Einführung in die Mikroökonomie*. Stuttgart: Kohlhammer.
- Lotka, A. J. (1956). *Elements of Mathematical Biology*. New York. Nachdruck von Elements of Physical Biology, Baltimore 1925.
- Mace, P. M. (1996). Developing and sustaining world fisheries resources: The state of the science and management. In Hancock and Smith (Eds.), *Developing and Sustaining World Fisheries Resources: 2nd World Fisheries Congress Proceedings*, Australia, pp. 1–20. CSIRO: Collingwood.
- Mackworth, A. K. (1977). Consistency in networks of relations. *Artificial Intelligence* 8, 99–118.
- Mackworth, A. K. (1987). Constraint satisfaction. In S. C. Shapiro (Ed.), *Encyclopedia of Artificial Intelligence*, pp. 205–211. New York: Wiley & Sons.
- Mallory, R. S., B. W. Porter, and B. J. Kuipers (1996). Comprehending complex behavior graphs through abstraction. In *Working Papers of the Tenth International Workshop on Qualitative Reasoning about Physical Systems (QR-96)*. AAAI Press.
- Mangasarian, O. L. (1966). Sufficient conditions for the optimal control of nonlinear systems. *SIAM Journal on Control* 4, 139–152.
- McKelvey, R. (1985). Decentralized regulation of a common property renewable resource industry with irreversible investment. *Journal of Environmental Economics and Management* 12, 287–307.
- McKelvey, R. (1986). Fur seal and blue whale: the bioeconomics of extinction. In M. Cohen (Ed.), *Applications of Control Theory in Ecology*, Lecture Notes in Biomathematics, pp. 57–82. Berlin: Springer Verlag.
- Melville, H. (1851). *Moby Dick*. Stuttgart: Reclam. Neuauflage von 1972.
- Metzler, W. (1987). *Dynamische Systeme in der Ökologie*. Stuttgart: Teubner.
- Moldenhauer, O., T. Bruckner, and G. Petschel-Held (1999). The use of semi-qualitative reasoning and probability distributions in assessing possible behaviors of a socio-economic system. In M. Mohammadian (Ed.), *Computational Intelligence for Modelling, Control and Automation*, Amsterdam, pp. 410–416. IOS Press.

- Morgan, M. G. and M. Henrion (1990). *Uncertainty. A Guide to Dealing with Uncertainty in Quantitative Risk and Policy Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Munro, G. R. (1999). The economics of overcapitalisation and fishery resource management: a review. In A. Hatcher and K. Robinson (Eds.), *Overcapacity, Overcapitalisation and Subsidies in European Fisheries*, pp. 7–23. Portsmouth: cemare.
- Petschel-Held, G., A. Block, M. Cassel-Gintz, J. Kropp, M. K. B. Lüdeke, O. Moldenhauer, F. Reusswig, and H.-J. Schellnhuber (1999). Syndromes of Global Change: A qualitative modeling approach to support environmental management. *Environmental Modeling and Assessment* 4(4), 295–314.
- Petschel-Held, G. and M. K. B. Lüdeke (2001). Integration of case studies by means of artificial intelligence. *Integrated Assessment*. in Druck.
- Pindyck, R. S. (1984). Uncertainty in the theory of renewable resource markets. *Review of Economic Studies*, 289–303.
- Polachek, T. (1990). Year around closed areas as a management tool. *Natural Resource Modeling* 4(3), 327–354.
- Pontryagin, L. S., V. G. Boltjanskij, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Miscenko (1962). *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Interscience: New York.
- Prager, M. H. (1994). A suite of extensions to a nonequilibrium surplus-production model. *Fishery Bulletin* 92, 374–389.
- Rodin, E. Y., D. N. P. Murthy, and N. W. Page (1990). *Mathematical modelling: a tool for problem solving in engineering, physical, biological, and social sciences*. Oxford: Pergamon Press.
- Rorty, R. (1989). *Kontingenz, Ironie und Solidarität*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.
- Rowe, W. D. (1994). Understanding uncertainty. *Risk Analysis* 14(5), 743–750.
- Schaefer, M. B. (1954). Some aspects of the dynamics of populations important to the management of the commercial marine fisheries. *Inter-American Tropical Tuna Commission Bulletin* 1(2), 25–56.
- Schellnhuber, H.-J. and J. Kropp (1998). Geocybernetics: Controlling a complex dynamical system under uncertainty. *Naturwissenschaften* 85(9), 411–425.
- Shrader-Frechette, K. S. and E. D. McCoy (1993). *Method in Ecology: Strategies for Conservation*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Shults, B. (1996). Toward a reformalisation of qsim. Technical Report TR-AI96-245, University of Texas Artificial Intelligence Laboratory.
- Smith, T. D. (1994). *Scaling fisheries: the science of measuring the effects of fishing, 1855-1955*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Spies, M. (1993). *Unsicheres Wissen: Wahrscheinlichkeit, Fuzzy-Logik, neuronale Netze und menschliches Denken*. Heidelberg: Spektrum.
- Stachowiak, H. (1973). *Allgemeine Modelltheorie*. Wien: Springer Verlag.
- Ströbele (1987). *Rohstoffökonomik. Theorie natürlicher Ressourcen mit Anwendungsbeispielen Öl, Kupfer, Uran und Fischerei*. München: Vahlen.
- Ströbele, W. J. and H. Wacker (1995). The economics of harvesting predator-prey systems. *Journal of Economics* 61(1), 65–81.
- Struss, P. (1990). Problems of interval-based qualitative reasoning. In D. Weld (Ed.), *Qualitative reasoning about physical systems*, pp. 288–305. San Mateo, California: Morgan Kaufmann.
- Tokuda, L. (1996). Managing occurrence branching in qualitative simulation. In *Proceedings of the 13th National Conference on Artificial Intelligence*, Cambridge. AAAI/MIT Press.
- Townsend, R. E. (1986). A critique of models of the american lobster fishery. *Journal of Environmental Economics and Management* 13, 277–291.

- Varian, H. R. (1995). *Grundzüge der Mikroökonomik*. München: Oldenbourg.
- Vincent, T. L. and J. M. Skowronski (Eds.) (1981). *Renewable Resource Management*. Lecture Notes in Biomathematics. Berlin: Springer.
- Wacker, H. and J. E. Blank (1998). *Ressourcenökonomik, Bd. 1*. Oldenbourg: München.
- Welsch, H. (1995). *Klimaschutz, Energiepolitik und Gesamtwirtschaft: Eine Allgemeine Gleichgewichtsanalyse für die Europäische Union*. Köln: Wirtschafts- und Sozialwissenschaftliche Fakultät der Universität zu Köln. Habilitationsschrift.
- Westphal, U. (1994). *Makroökonomik. Theorie, Empirie und Politikanalyse*. Berlin: Springer Verlag.
- Williams, B. C. (1991). A theory of interactions: unifying qualitative and quantitative algebraic reasoning. *Artificial Intelligence* 51, 39–94.
- Zimmermann, H.-J. (1997). Uncertainty modelling and fuzzy sets. In H. G. Natke and Y. Ben-Haim (Eds.), *Uncertainty: Models and Measures*, Mathematical Research, pp. 84–100. Berlin: Akademie-Verlag.

Index

- Äquivalenz
 - qualitativ, 30
- Überfischung
 - serielle, 39
- Ableitung
 - qualitative, 28
- Abschreibungen, 38
- Abstraktion
 - einer Funktion, 19
 - strukturelle, 26
- Abstraktionsfunktion, 16
- Abstraktionsoperator, 19
- Addition
 - erweiterte qualitative, 30
 - qualitative, 29
- Allmende-Ressource, 35
- Beschränkung, 23
- Beschränkungs-Erfüllungs-Problem, 23
- Bewertung von Zuständen, 87
- Bildbereich
 - erzeugter, 16
 - qualitativer, 16
- Bioökonomik, 33
- buy-back program, 40
- Differentialgleichung
 - qualitative, 23
- Diskontrate, 44
- Eigentumsrechte
 - exklusive, 36
- Entscheidungsfunktion, 43
- Entscheidungsvariable, 57
- Erlös, 42
- Erntefunktion
 - optimale, 75
- Erntekosten, 42
- Erntekostenfunktion, 62
- Ertrag
 - maximaler nachhaltiger, 41
- Ertragsgesetz, 43
- Funktion
 - angemessene, 15, 18
 - Cobb-Douglas, 78
 - stückweise stetig differenzierbar, 65
- Gefangenendilemma, 36
- Gesamtgewinn zum Gegenwartswert, 44
- Gesamtkostenfunktion, 42
- Gewinn, 42
- Gewinnfunktion, 42
 - kurzfristige, 64
 - optimale, 75
- Gewinnfunktional, 63
- Grenzmarke, 16
- Hamiltonfunktional, 68
 - maximiertes, 68
- homo oeconomicus, 43
- Inputmanagement, 36
- Intervall-Nachfolger, 20
- Intervallzustand, 19
- Investitionen, 38
- Investitionskosten, 38
- Investitionskostenfunktion, 63
- Kapazitätsgrenze, 41
- Kapital, 38
- Kapitalsystem, 63
- Kollaps, 94
- Konfluenzraum, 16
- Konkurrenz
 - vollkommene, 41
- Kosten, 42
- Lösung
 - einer QDGL, 23
 - eines Anfangswertproblems, 66
 - zu Steuerung gehörend, 67
- Lösungsmenge
 - korrekte, 25
 - vollständige, 25
- Management, 96

- Markstelle, 17
- Maximumprinzip, 46, 50, 65, 68
- Merkmal
 - pragmatisches, 54
- Modellfokus, 54
- Modellrelation, 54
- Monopol, 41
- Monotonie
 - erweiterte qualitative, 30
 - qualitative, 29
- MSY, 41
- Multiplikation
 - qualitative, 29
- Nettoinvestitionen, 38
- occurence branching, 87
- Oligopol, 41
- Optimierungsproblem
 - dynamisches, 67
- Original, 54
- Outputmanagement, 36
- Planungsintervall, 44
- Policy Mix, 97
- Preisnehmer, 42
- Produktionsergebnis, 42
- Produktionsfaktoren, 42
- Produktionsfunktion, 42
- Pseudoverhalten, 26
- Puls-Investition, 48
- Punkt
 - kritischer, 15
- Punkt-Nachfolger, 20
- Punktzustand, 19
- QDGL, 23
- Qualifizierung, 18, 19
- Regenerationsfunktion, 61
- Regler, 75
- Ressource
 - regenerierende, 33
- Richtung
 - qualitative, 19
- Sprungstelle, 17, 18
- Steuerung, 65
 - optimale, 67
 - zulässige, 67
- Steuerungsbereich, 65
- Strukturtheorem, 20
- System
 - adjungiertes, 68
 - dynamische Optimierung, 66
 - erweitertes, 67
 - logistisches, 61
- Trägheit des Kapitals, 91
- Trajektorie, 66
- Unsicherheit
 - metrische, 55
 - strukturelle, 55
- Verhalten, 20
- Verhaltensraum, 20
- Verkürzungsmerkmal, 54
- Vollständigkeitstheorem, 26
- Vorzeichen
 - qualitatives, 19
- Vorzeichen-Addition, 28
- Vorzeichen-Multiplikation, 28
- Vorzeichen-Negation, 28
- Wachstum
 - logistisches, 41
- Walfang, 91
- Wert
 - qualitativer, 19
- Werte
 - korrespondierende, 30
- Wissen
 - ungenaues, 55
 - unsicheres, 56
 - unvollständiges, 55
- Zeithorizont, 44
- Zeitintervall, 65
- Zielfunktional, 67
- Zustand
 - qualitativer, 17
- Zustandsraum, 65
 - qualitativer, 17, 18